ストラテジー使用能力が数学の問題解決に与える影響

立花　佳帆・櫻庭　裕晃・山本　奨

（2019年２月15日受付）
（2019年２月15日受理）

Kaho TACHIBANA・Hiroaki SAKURABA・Susumu YAMAMOTO

Effect of Strategic Competencies on Solving Mathematical Problems

要　約

数学の問題解決力の育成に関して，ストラテジーの指導が有効であることが言われているが，その具体的な指導については教員に委ねられてきた．そこで，生徒が獲得しているストラテジーを分析し，テストの得点に与える影響を調べることで，問題解決力に効果的なストラテジーの指導方法についての基礎的な検討を行うことを目的とした．その結果，今回対象とした高校生が使用可能なストラテジーは，「思考能力」「図表化能力」「文章化能力」の3つの観点で捉えていることが推察された．また，「思考能力」は，テストの得点に正の影響を与えているが，「図表化能力」「文章化能力」に関しては，正の影響が見られなかった．中でも「文章化能力」はテストの得点に負の影響を与える場合があることが示唆された．

研究の背景と目的

数学教育の目標の1つに，問題解決力の育成がある．この問題解決力について梅沢（1995）は，解決に至るまでの心理的過程を客観的に分析することが大切であり，それによって得られた知識が，その後における問題解決の力となることを指摘している．また，杉山（2006）は，数学における問題解決の力の1つとして，「問題解決の一般的なストラテジーを知っており，これが適切に使えるということ」を指摘している．つまり，この問題解決に至るまでの心理的過程や，問題解決のための一般的なストラテジーといった思考方略（以下，ストラテジーとする）は，生徒が問題解決できるようになるために指導すべきことである．このストラテジーの指導の重要性は，「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」においても「学習の内容と方法の両方を重視」と記されており，今後さらに意識すべき指導事項の1つであると考える．一方，ストラテジーをどのように指導するかは教員に委ねられており，具体的指導内容についての検討も必要である．

ストラテジーとは，「問題解決過程を進展させるために必要になる情報の処理方法を，具体化し，技法として整理したもの」であると考えられる．ストラテジーに関しての先行研究では，Alfredら（2017）や，栗原（1991）などが数学の問題解決で使用するストラテジーをまとめている．また，G. Polya（1999）は，問題解決の過程における心理的経過について細かく分析している．他にもストラテジーに関する先行研究は数多くある．一方，

＊岩手大学教育学研究科教職実践専攻，岩手大学大学院教育学研究科

ストラテジーの分類は，数学の指導過程や，学術的な過程による定義が多く，実際の生徒の思考過程をもとに定義された先行研究は見当たらない．また，報告者らは，ストラテジーの指導を実際に授業で実践したが，生徒の有用感を高められず，教師と生徒の認識の差を感じた．そこで，本研究では,生徒が獲得しているストラテジーを分析し，テストの得点に与える影響を調べることで，問題解決力の育成に効果的なストラテジーの指導方法について,基礎的な検討を行うことを目的とする．

研究の方法

1. 調査対象者　学力上位の高等学校1年生200名を対象に調査を行った．
2. 調査日　2018年6月から12月まで
3. 調査材料

(1)「数学におけるストラテジー使用能力尺度」の作成

自分ひとりで数学の問題を解く状況におけるストラテジー使用能力(以下ストラテジー使用能力)について，Alfred（2017）と片桐（2004）を参考に10個程度のストラテジーを想定し，24項目からなる質問紙を作成した．調査は,「使うことができる」から「使うことができない」までの5件法で実施した．ただし，質問項目の意味が理解できない場合には,「使うことができない」に○を付けさせた．

(2)「ストラテジー使用能力」が「テストの得点」へ与える影響

ストラテジー使用能力：作成した「数学におけるストラテジー使用能力尺度」を独立変数として用いた．なお,「数学におけるストラテジー使用能力尺度」の作成時期と，テストの実施時期は前後するが，独立変数は，不変の能力であると仮定しているため，結果の解釈に影響しないと考える．

テストの得点：高等学校で実施される数学のテストを従属変数として用いた．テストは，生徒が一人で問題解決を試みる場であるため，自力で問題を解決する能力として定義した．使用したテストは，定期的に行われる，範囲の定められたテスト1，テスト2と，大学入試を想定して作成されたテスト3の結果である．

結果と考察

(1)「数学におけるストラテジー使用能力尺度」の作成

はじめに，高校生がどのようなストラテジーを獲得して使用できるのか，その観点を抽出するために因子分析を行うこととした．回答に不備のない180名を分析に用いた．因子数は，固有値の落差を手がかりに，3因子を抽出した．また，24項目のうち，複数の因子に同等の負荷量を示している項目を削除し，20項目で因子分析（最尤法）を行った．そのプロマックス回転後の因子パターンと因子間相関を Table1に示す．

第1因子では,「推測しながら考える」「筋道立てて，順番に考える」などの12項目に高い負荷量が見られた．これらは，問題を解決する際，頭の中で数学的に思考することを示しているものであると考えたため,『思考能力』と命名した．

第2因子では,「数量やその関係を表にして考える」「数量やその関係を図にして考える」などの4項目に高い負荷量が見られた．これらは，問題を理解する際に，図や表にして思考することを示していると考えたため,『図表化能力』と命名した．

第3因子では,「分かったことを書き加えていく」「問題文の情報を書き出す」などの4項目に高い負荷量が見られた．これらは，問題を理解する際に，紙などに文章として書き出すことを示していると考えたため,『文章化能力』と命名した．

Table 1 「数学におけるストラテジー使用能力：因子分析の結果と下位尺度構成」

項目	因子 1	因子 2	因子 3
【思考能力】（α=.924）			
20. 推測しながら考える.	.850	.007	−.069
1. 筋道立てて，順番に考える.	.816	.095	−.226
2. きまりを見つける.	.781	.081	−.055
3. 「このことが言えるには何が分かればいいか」と考える.	.760	−.001	.021
4. 問題に合わせて視点を変える.	.703	.064	.004
19. 全ての可能性を考えだす.	.635	−.105	.101
9. 特殊な形や数にしてみる.	.579	−.059	.219
15. 別な角度から問題にアプローチする.	.567	−.120	.248
14. 答えや結論をもとに考える.	.550	.100	.097
6. 条件を簡単にしてみる.	.536	.001	.171
23. 答えにつながる要素を考える.	.517	.222	.081
13. 共通点を見つける.	.508	.097	.208
【図表化能力】（α=.892）			
22. 数量やその関係を表にして考える.	.100	.935	−.137
21. 数量やその関係を図にして考える.	.152	.827	−.158
11. 表にして考える.	−.160	.704	.355
10. 図にして考える.	−.085	.574	.350
【文章化能力】（α=.821）			
12. 分かったことを書き加えていく.	−.086	.062	.816
18. 問題文の情報を書き出す.	.094	−.112	.700
7. 問題文に書かれていることをまとめる.	.021	.183	.575
17. 問題を単純な形や数にしてみる.	.346	−.117	.547
プロマックス回転後の因子間相関（右） 思考能力		.626	.567
下位尺度間の相関（左） 図表化能力	.611		.487
文章化能力	.630	.540	

次に，これらの因子に高い負荷量を示した項目を用いて，足し上げ点による下位尺度を構成することを試みた．つまり，点数が高いほど，それぞれの尺度において，それを使用できるということを表すものである．各下位尺度のクロンバックのα係数はいずれも.80を超えており，当該項目とそれ以外の項目の合計とのピアソンの積率相関係数についても問題となる項目は見られなかった．これらのことから，高い内的一貫性が確認されたと言える．Table1に示した下位尺度間相関を見ると，いずれも中程度の正の相関が見られた．作成したストラテジー使用能力尺度から，生徒は，以

下の3つの能力が使用できると推定された．

1つ目は，「思考能力」である．これは，問題解決の際に，頭の中で数学的に考えていく能力である．生徒は，この「思考能力」を活用して，あらゆる数学の問題を解いていることが考えられる．

2つ目は，「図表化能力」である．これは，図や表を用いて整理する能力である．生徒は，考えるための手立てとして，図や表に表すことを獲得していると考えられる．

3つ目は，「文章化能力」である．これは，問題を文章等で整理する能力である．「問題」や「書く」といった項目に反応を示していることから，生徒は，自分で問題を解決する際，解決の見通しを立てるために，問題を書いて整理しながら解釈する能力を獲得していることが考えられる．

先行研究より，教師の指導すべきストラテジーは10個程度であることを想定して項目を作成したが，生徒は，3つの組み合わせで考えていることが推察された．よって，生徒の思考の観点は3つ程度であることを考慮して指導に臨む必要がある．

(2)「ストラテジー使用能力」が「テストの得点」へ与える影響

独立変数と従属変数ともに使用可能な170名を分析に用いた．重回帰分析の結果をTable2に示す．3つのテスト全てで，重回帰式は有意となった．「思考能力」は，全ての場合において正の偏回帰係数が得られた．また，「文章化能力」は，テスト3においては負の影響が見られた．「図表化能力」は全ての場合において影響が見られなかった．

Table 2 「ストラテジー使用能力尺度がテストの得点へ与える影響」

従属変数	独立変数	*β*	*R*
テスト1 図形の性質	思考能力	.342**	.282**
	図表化能力	−.005	
	文章化能力	−.113	
テスト2 式と証明，複素数と方程式	思考能力	.411**	.305**
	図表化能力	−.072	
	文章化能力	−.165	
テスト3 大学入試を想定したテスト	思考能力	.332**	.290**
	図表化能力	.068	
	文章化能力	−.290**	

*p<.05　**p<.01

Table2より，「思考能力」を使用できる生徒は，テストの得点が高い結果となったことから，数学的な思考を働かせることは，自力で問題を解決できることに影響を与える尺度であると分かった．この結果から，問題解決に直接関わっているストラテジーは，頭の中で考える「思考能力」であると考えられる．一方，「図表化能力」や「文章化能力」は，テストの得点へプラスに働いていない結果となった．この結果から，「図表化能力」や「文章化能力」は，問題解決には直接つながらず，問題を理解することに影響を与えている可能性が考えられる．

①ストラテジーの位置付け

上記の結果を市川（2013）の「数学の問題解決のプロセス」に位置付けるとFigure1のようになる．

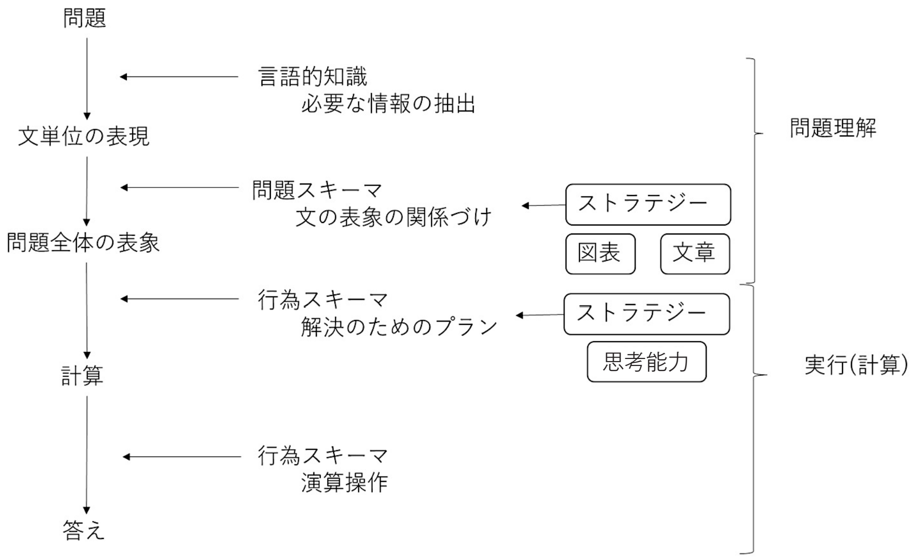

Figure1 「数学の問題解決のプロセス（市川（2013）をもとに修正)」

市川（2013）は，数学の問題を理解する際，はじめに，日本語で書かれている問題を読み取り，文章の中の必要な情報を抽出する．その後，問題スキーマという，問題のタイプごとにもっている知識をうまく使いながら，問題全体の表象をつくりあげることを行うとしている．ここでいうスキーマとは，経験的知識から取り出した，知識の体系のことであり，「○○とはどういうものか」という一般的知識である．即ち，概念のようなものである．つまり，問題スキーマとは，問題を読んだときに,「これは変化の問題だ」というような，問題解釈に関する経験的かつ体系化された知識を指す．また，問題を読む際，文章を文字のまま捉えるのではなく，命題と呼ばれる意味内容を分解して取り出すことや，命題的ネットワークといった命題の構造化を図ることを行うとしている．つまり，生徒が問題を理解する際，問題文を読みながら必要な情報を抜き出し, 構造化を図りながら，既有の知識と照らし合わせて，問題の状況を把握しているのである．この問題を構造化して理解するために使用するストラテジーが「図表化能力」や「文章化能力」であると考えられ，生徒は問題に関する既有知識（問題スキーマ）と照らし合わせ，問題を理解するために，文章や図表を用いて構造化していることが考えられる．

また，市川（2013）は，問題全体の表象ができあがった後，行為スキーマを用いて解決のためのプランを立てるとしている．行為スキーマとは，「こういう問題のときにはこのようなやり方で解いていくと良い」という知識を指す．この知識を使って解法探索を行い,「こういうやり方でできそうだ」となれば式を立てられる．この際，問題が典型的なものであれば，すぐ適応できる行為スキーマを持っているが，見慣れない問題に対しては，方略的知識を使用するとしている．

この方略的知識は, 本研究における「思考能力」であることが考えられる．行為スキーマという，経験的知識だけでは解決に至らない場合に,「思考能力」を用いて見通しを立てる．この見通しを立てられた生徒が，式を立て演算操作を行い，解決に近づくと考える．即ち，問題解決できるためには，この見通しを立てられることが重要であるだろう．この方略的知識について市川（2013）は,「適応範囲が広い代わりに，いつも必ず上手くいくとは限らない」,「問題解決の得意な人は，その分野に特有の方略的知識を，一種の『ワザ』としてもっていて, むやみに試行錯誤するのではなく，効率的に解を探し当てる」と述べている．この点に留意しながら授業場面にうつして考えると，問題解決場面において，本時の学習が解決容易な生

徒は,「思考能力」を「ワザ」として既に持っており,容易に解決への見通しが立てられる.これに対して,解決困難な生徒は,「思考能力」を獲得していたとしても,どの方略がうまくいくのかが分からず,「いつも必ず」ではない方略を試行錯誤しているうちに,解決の時間が終わってしまうことが考えられる.そこで,教師は,生徒の「思考能力」に関する「ワザ」の差を埋めることが,必要であると考える.どのストラテジーでどんな行為スキーマを補完するのかを明示することが,解決困難な生徒にとっては必要な手立てだと言えるだろう.

②文章化能力の影響について

Table2の結果を見ると,テスト3のみ,文章化能力が負の影響を与えている.これは,文章化能力は,市川（2013）のいう命題的表現に留まっているからだと考えられる.解決困難な生徒は,読み取ったことをリストアップしても,問題スキーマを呼び起こすことができないため,解決にまで到達しないのである.

また,テスト3の結果から,学力上位の高等学校の生徒の中には,文章化はできないが,解決に到達している生徒がいることが示唆された.これらの生徒は,問題把握の段階で,問題スキーマを呼び起こすために,書く活動をせず解決してきたことが考えられる.そこで,指導においては,生徒にとって容易に問題スキーマを呼び起こせる場面では,あえて文章化する必要がないことが示唆される.一方で,問題スキーマを呼び起こせないときの方略として,文章化するストラテジーを使用しながら構造化していくことが考えられる.そのため,指導場面では,容易に問題スキーマを呼び起こせない状態を作り出すことが,文章化能力の育成として重要である.未知の問題に対処できる生徒の育成には,問題スキーマだけでなく,ストラテジーを使用する状況を教師がつくり出す必要があると考える.

総合的な考察

研究から,以下の4点の考察を得た.

1点目は,教師の指導観点で捉えていた問題解決のためのストラテジーを,生徒の獲得の観点から見ると,「思考能力」「図表化能力」「文章化能力」の3つを使用能力として捉えていると推察されたことである.

2点目は,重回帰分析より,「思考能力」は,テストの得点にプラスに働き,「図表化能力」「文章化能力」は,正の影響が見られなかったことである.このことから,ストラテジーは全て同じレベルではなく,使用場面が,問題解決の場面と,問題理解の場面とで異なっていると考えられる.

3点目は,「文章化能力」は,テスト3でのみ負の影響が示唆されたことである.これは,解決が容易な生徒は,文章化せずに問題スキーマを呼び起こしているからであると考えられる.即ち,容易に問題スキーマを呼び起こせる場面では,あえて文章化する必要がない生徒がいると示唆された.また,このことから,指導場面において容易に問題スキーマを呼び起こせない状態を作り出すことが,文章化能力の育成には必要であると考えられる.

4点目は,生徒の「思考能力」には,程度があると考えられるため,教師は,ストラテジー指導の際に,生徒の「思考能力」に関する「ワザ」の差を埋めることが必要である.どのストラテジーでどんな行為スキーマを補完していくかを明示することが,解決困難な生徒にとっては必要な手立てと考える.

一方,研究の課題は3点ある.

1点目は,学力上位の高等学校の生徒において得られた考察は,他の集団において同様であるかの検証が必要である.もし,集団によって異なる場合はストラテジーの分類を細分化していくことが求められる.

2点目は,今回分析に用いたテストは,既にスキーマを呼び起こせる状態にあり,ストラテジー

を使用せずに解決に至った場合などが考えられるため，ストラテジーの使用の有無が明確でないことである．問題解決の力を適切に測定するテストの作成が求められる．

3点目は，明らかになったストラテジーの分類や構造について，授業レベルで考えていくことである．どのような指導が効果的かの検証を行う必要がある．

今後，これらの追究がなされ，明らかになることが期待される．

＜引用文献＞

Alfred，stephen．（2017）．『数学の問題をうまくきれいに解く秘訣』．共立出版．

G．Polya．（1999）．『いかにして問題をとくか』．丸善株式会社．

栗原幸宏．（1991）．「自ら学ぶ力を育てる数学指導ー1次関数のストラテジーの指導を通してー」．日本数学教育学会誌第73巻，第7号．

市川伸一．（2013）．『勉強法の科学　心理学から学習を探る』．岩波書店．

杉山吉茂．（2006）．『豊かな算数教育をもとめて』．東洋館出版社．

梅沢敏夫．（1995）．『数学学習の理論と問題解決』．培風館．

文部科学省．（平成28年12月21日）．「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）（中教審第197号）」．

参照日：2019年1月6日，参照先：文部科学省ホームページ：

（http://www. mext. go. jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1380731. htm）