岩手大学教育学部研究年報　第79巻（2020．3）１～21

「ガモフの宝探し」問題の改題の活用に関する考察

―義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための指導を視野に―

中　村　好　則*

（2019年９月13日受付，2020年１月14日受理）

第１章　研究の背景

平成30年３月に高等学校学習指導要領が公示された。その総則では「学習の遅れがちな生徒の指導における配慮事項（第１章総則第５款１（6））」において「学習の遅れがちな生徒などについては，各教科・科目等の選択，その内容の取扱いなどについて必要な配慮を行い，生徒の実態に応じ，例えば義務教育段階の学習内容の確実な定着を図るための指導を適宜取り入れるなど，指導内容や指導方法を工夫すること（文部科学省2019a，p.156，下線は筆者，以下同様）」が述べられている。従前は，学習の遅れがちな生徒と障害のある生徒に対する配慮事項は併せて規定されていたが，今回の改訂ではそれぞれを個別に規定し充実が図られている。また，その解説（文部科学省2019a）では，「各教科・科目等の選択，その内容の取扱いなど」の「など」には，個々の生徒に応じた学習意欲を高める指導方法などが考えられることが述べられている（p.156）。

また，高等学校学習指導要領解説数学編（文部科学省2019b）においても「第３章各科目にわたる指導計画の作成と内容の取扱い」の「第３節総則に関連する事項」の「５義務教育段階での学習内容の確実な定着（総則第２款の４の（2））」で「例えば，「図形と計量」を取り扱う際に，中学校で学習した図形の相似や三平方の定理を復習した上で数学Ⅰの内容に入ったり，数学Ⅰの「図形と計量」の余弦定理を学習した後で改めて三平方の定理の意味を考えたりさせることが考えられる（p.141）」や「生徒の特性等を踏まえ，標準単位数の標準の限度を超えて単位数を配当し，それぞれの内容に関連する中学校の内容を十分な時間をかけて確実な定着を図る機会を設けることも考えられる（p.141）」ことが述べられている。また「学校設定科目を設けて義務教育段階の内容を取り扱う場合にも計算練習などだけにならないよう留意し，高等学校で学習する内容との関連を十分に踏まえることが大切である（p.142）」ことが述べられている。学習の遅れがちな生徒が高等学校段階の学習に円滑に移行できるように義務教育段階の内容の確実な定着を図る指導が必要である。解説数学編（文部科学省2019b）でも指摘されているように単なる計算練習だけにならないように指導の工夫が必要である。学習の遅れがちな生徒が高等学校段階の学習に円滑に移行

＊　岩手大学教育学部

できるようにするためには，学習の遅れがちな生徒が数学と日常との関連性や数学の有用性などを感得し，学習意欲を高め学習活動に取り組めるような指導を行うことが必要であり重要と考える。そこで，本研究では，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための指導を視野に，日常との関連が深く，数学の有用性を感得できる題材として「ガモフの宝探し」問題の改題を活用した指導について考察する。「ガモフの宝探し」問題は，①宝探しという問題場面設定であり，日常や社会との関連を考えやすいこと，②多様な解法があり，生徒の既習事項に合わせて問題解決ができること，③ICT（図形ソフト）を活用した指導方法を取り入れることで視覚的・体験的な理解を支援できること，④クイズやパズル的な要素があり，生徒が意欲的に取り組むことができること，⑤「ガモフの宝探し」問題のような類題を開発し用いることで難易度や用いる既習事項を調整できることなどの利点が考えられ，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための指導に活用できる教材となりえるものと考える。

第２章　研究の目的と方法

1）研究の目的

本研究では，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための指導を視野に，①「ガモフの宝探し」問題の改題を開発し，②その活用の可能性を探るとともに，③開発した改題を活用した指導事例を提案することを目的とする。

2）研究の方法

以下の方法で研究を進める。

(1)「ガモフの宝探し」問題について，多様な解法を検討するとともに，学習指導要領や教科書の扱い，「ガモフの宝探し」問題を活用した実践事例等を文献や先行研究をもとに考察する（第３章）。

(2) 学生を対象に「ガモフの宝探し」問題に関する調査を行い，「ガモフの宝探し」問題の学生の理解状況について考察する（第４章）。

(3)「ガモフの宝探し」問題の改題を開発し（目的①，第５章），学生を対象に調査を行い，開発した改題の活用の可能性について検討する（目的②，第６章）。

(4) (1) から (3) の結果を基に「ガモフの宝探し」問題の改題を活用した指導事例を構想し提案する（目的③，第７章）。

第３章　「ガモフの宝探し」問題とは

「ガモフの宝探し」問題は，高校の数学活用の教科書（根上ら 2012，pp.28-29）で取り上げられている（表１，問題①）。そこでは，「ガモフの宝探し」問題だけでなく，その類題（表２，問題②）も扱われている。また，「ガモフの宝探し」問題は，テレビ番組〔(2018年２月18日放送のドラマ「天才を育てた女房（岡潔の妻）」〕でも取り上げられるなど話題性もある。

現行の高等学校学習指導要領解説（文部科学省2009）の数学活用において，「ガモフの宝探し」問題（「財宝探しの問題」と記されている）が例示され，「生徒一人一人に井戸の位置を仮定させ，作図により，財宝の位置を求めさせる活動を行う。それらの活動をもとに，

財宝の位置が井戸の位置によらず決まりそうなことを予想する。そして，平面幾何に関するソフトウェアなどを利用して，井戸がどの位置にあっても財宝の位置が変わらないことを視覚的に確かめ，なぜ，そのような結果になるのかを話し合わせる。なお，生徒の実態等を踏まえ，その理由を図形の性質を用いて証明されることも考えられる（p.61）」と指導法についても述べられている。さらに，新しい高等学校学習指導要領解説（文部科学省2019a）では，数学Cにおいて「ガモフの宝探し」問題（「財宝探しの問題」と記されている）が例示され，複素数を用いて考察することも考えられると述べられている（p.124）。現行の学習指導要領（文部科学省2009）とは異なる扱いが示されている。

また「ガモフの宝探し」問題は，多様な解法ができることでも知られており，スーパーサイエンスハイスクール等での課題研究の課題として扱われることも多い。例えば，愛媛県立松山南高等学校（2011，p.22）や滋賀県立彦根東高等学校（2016，p.16），岐阜県立関高等学校（2017，pp.67-68）などがある。これらの学校では，「ガモフの宝探し」問題の多様な解法に着目したり，ICT（図形ソフト）を活用して考えたりなどの取り組みが報告されている。「ガモフの宝探し」問題は，現状では，数学の発展的な問題として，比較的数学ができる，或いは，数学に興味がある生徒を対象とした指導で活用されていると言える。

表1　「ガモフの宝探し」問題（根上ら2012，pp.28-29）

問題①

右のようなメッセージの書かれたある島の地図を発見しました。そこで，その島に行ってみると，松の木と梅の木はありましたが，井戸は朽ち果ててなくなっていました。さて，あなたは財宝を発見できるでしょうか？

井戸より松の木まで歩き，右回りに90向きを変え，同じ距離だけ進んで，そこに杭を打て，井戸より梅の木まで歩き，左回りに90向きを変え，同じ距離だけ進んで，そこに杭を打て，2つの杭の真ん中の地点に財宝を埋めた。

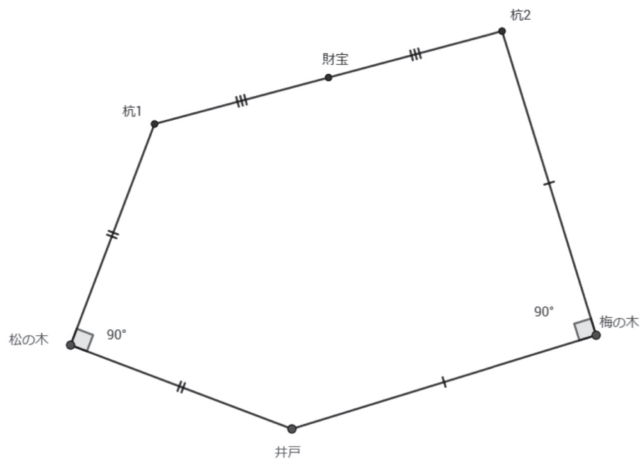

図1　「ガモフの宝探し」問題（問題①）の図

表２　「ガモフの宝探し」問題の類題（根上ら2012，p.29）

問題② 　次のメッセージを頼りに，第二の財宝を探しましょう。 ・井戸から松の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進め， ・そこから梅の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進め， ・そこから桜の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進め， ・その位置と井戸との中点に財宝を埋めた。

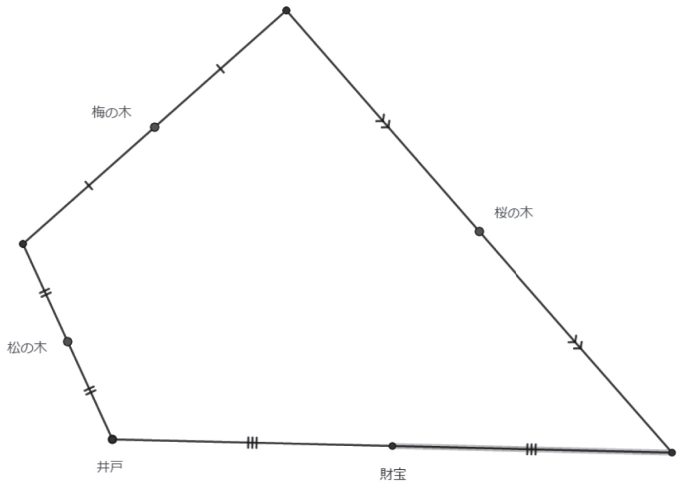

図２　「ガモフの宝探し」問題の類題（問題②）の図

以下では，問題①（表１）について，1）複素数平面による解法，2）初等幾何による解法，3）ベクトルによる解法，4）余弦定理による解法の例について述べる。問題①では「財宝は松の木と梅の木を結んだ線分を斜辺とする直角二等辺三角形の直角の頂点の位置にある」ことを示す。また，「ガモフの宝探し」問題の類題である問題②（表２）については，5）において幾何的な証明の概略を述べる。問題②では「財宝は松の木と梅の木，桜の木を結んでできる平行四辺形の残りの頂点の位置にある」ことを示す。

1）複素数平面による解法

複素数平面は，平成21年学習指導要領（文部科学省2009）では数学Ⅲで，平成30年学習指導要領（文部科学省2019b）では数学Ｃで扱われている。それらの科目を履修していなければ，この証明を扱うことは難しい。

（証明）

井戸，松の木，梅の木，杭１（松の木側），杭２（梅の木側），財宝，松の木と梅の木の中点を複素数平面で，P(α)，A(z)，B（w)，C(z')，D(w')，M(β)，Nとおく。

点z_1を点z_0のまわりにθだけ回転した点z_2は，$z_2-z_1=(z_1-z_0)(\cos\theta+i\sin\theta)$なので，点Aを中心として点Pを90°回転した点が点Cであるから，

$$z' = (\alpha - z)(\cos 90° + i \sin 90°) + \mathrm{z} = (\alpha - \mathrm{z})i + \mathrm{z}$$

同様に，点Bを中心として点Pを－90°回転した点が点Dであるから，

$$w' = (\alpha - w)\{\cos(-90°) + i \sin(-90°)\} + w = (\alpha - \mathrm{w})(-i) + w$$

従って，線分CDの中点Mは，

$$\beta = \frac{z' + w'}{2} = \frac{1}{2}\{(\alpha - \mathrm{z})i + \mathrm{z} + (\alpha - \mathrm{w})(-i) + w\} = \left(w - \frac{z+w}{2}\right)i + \frac{z+w}{2}$$

すなわち，点Mは線分ABの中点Nを中心として，点Bを90°回転した点である。

ゆえに, AN=BN=MN, ∠MNB=90°なので, ⊿ABMは∠M=90°の直角2等辺三角形である。

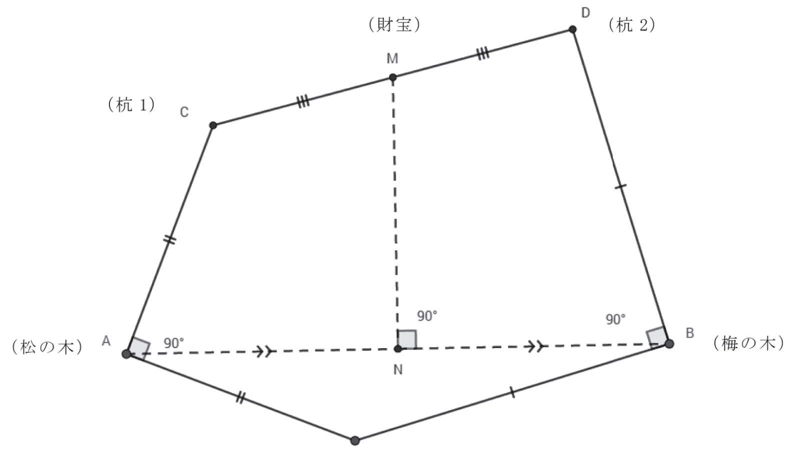

図3　複素数平面による解法

2）初等幾何（三角形の合同，中点連結定理）による解法

中学校数学で履修した三角形の合同と中点連結定理を用いて証明が可能であるが，複数の補助線が必要であり，それらの補助線を考えることは生徒にとってそう容易なことではない。義務教育段階の学習内容（三角形の合同，中点連結定理など）の定着のための教材とはなりにくいものと考える。

（証明）

井戸，松の木，梅の木，杭1，杭2，財宝を，P，A，B，C，D，Mとおく。また，点Cの点Aに点対称な点をC’，点Dの点Bに点対称な点をD’とおく。

PA=AC=AC’，AP⊥CC’より，⊿PCC’は直角二等辺三角形であるから，PC=PC’…①

同様に，

PB=BD=BD’，BP⊥DD’より，⊿PDD’は直角二等辺三角形であるから，PD=PD’…②

⊿PDC’と⊿PD’Cにおいて

PC’=PC（∵①）

PD=PD’（∵②）

∠DPC’=∠D’PC（=∠CPD＋90°）

∴◿PDC’≡◿PD’C　　　　　従って，DC’=D’C　…③

また，∠DPC’=∠D’PC（=∠CPD＋90°）であるから，◿PDC’は◿PD’Cを90°左に回転移動したものである。したがって，DC’⊥D’C　…④

◿DCC’において，点Aと点Mは辺CC’と辺CDの中点であるから，中点連結定理より，

$$\mathrm{AM}=\frac{C'D}{2},\qquad \mathrm{AM}//\mathrm{C'D}$$

同様に，◿CDD’において，点Bと点Mは辺DD’と辺DCの中点であるから，中点連結定理より，

$$\mathrm{BM}=\frac{D'C}{2},\qquad \mathrm{BM}//\mathrm{D'C}$$

以上より，AM=MB，AM⊥MB

よって，◿ABMは∠M=90°の直角2等辺三角形である。

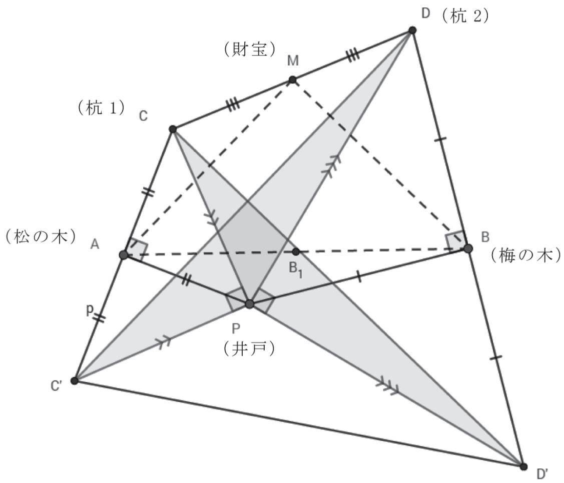

図4　初等幾何による解法

3）ベクトルによる解法

ベクトルは，平成21年学習指導要領（文部科学省2009）では数学Bであったが，平成30年学習指導要領（文部科学省2019b）では数学Cでの扱いとなり，それらの科目を履修していなければ，この証明を扱うことは難しい。

（証明）

井戸，松の木，梅の木，杭1，杭2，財宝を，P，A，B，C，D，Mとおき，線分ABの中点をNとおく。また， $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{PM}=\vec{m}$，$\overrightarrow{PN}=\vec{n}$とおく。

条件より，

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=0\qquad \vec{b}\cdot\vec{d}=0\quad |\vec{a}|=|\vec{c}|\quad |\vec{b}|=|\vec{d}|$$

また，

$$\vec{m}=\frac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}=\frac{(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{d})}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}\qquad \vec{n}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

であるから，

$\overrightarrow{NM}=\vec{m}-\vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$

$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角を θ とおくと，$\vec{c}$と$\vec{d}$のなす角は(180° − θ)であるから，

$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos(180°-\theta)=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\vec{a}\cdot\vec{b}$　　$\therefore \vec{c}\cdot\vec{d}=-\vec{a}\cdot\vec{b}$

同様に，$\vec{a}$と$\vec{d}$，$\vec{b}$と$\vec{c}$のなす角は(θ − 90°)となるから

$\vec{a}\cdot\vec{d}=|\vec{a}||\vec{d}|\cos(\theta-90°)=|\vec{c}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{c}\cdot\vec{b}$　　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{b}$

従って，

$$\left|\overrightarrow{NM}\right|^2=\left|\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right|^2=\frac{|\vec{c}|^2+2\vec{c}\cdot\vec{d}+\left|\vec{d}\right|^2}{4}=\frac{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}{4}=\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|^2=\left|\frac{\overrightarrow{BA}}{2}\right|^2=\left|\overrightarrow{NA}\right|^2$$

$$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{b}-\vec{d}\cdot\vec{a}}{2}=\frac{-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{b}}{2}=0$$

よって，NM=NA，NM ⊥ AB より，

◿MAB は，∠M=90°の直角２等辺三角形である。

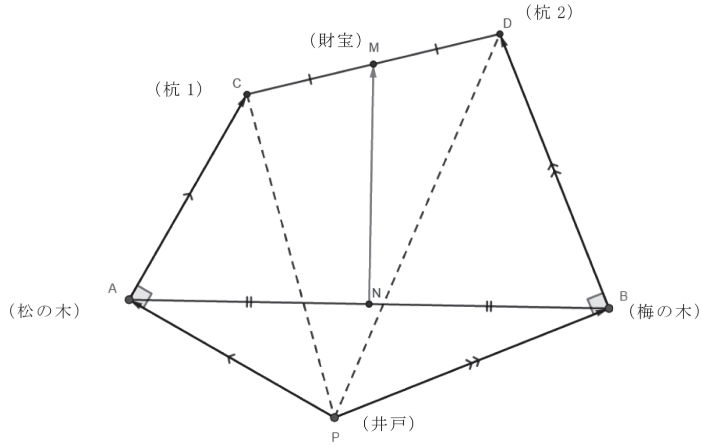

図５　ベクトルによる解法

4）余弦定理による解法

この解法では，数学Ⅰの余弦定理だけでなく，数学Ⅱの加法定理，数学Aの中線定理（ハップスの定理）も用いる。複数の科目で学ぶ内容を用いて証明しなければならず，その解決は容易ではない。

（証明）

井戸，松の木，梅の木，杭1，杭2，財宝を，P，A，B，C，D，Mとおく。

PA=AC=a，PB=BD=b，MC=MD=m，∠CPD= α とおく。

⊿ACDと⊿BCDにおいて，中線定理より，

$a^2+AD^2=2(AM^2+m^2)\quad \therefore\quad AD^2=2AM^2+2m^2-a^2$ …①

$b^2+BC^2=2(BM^2+m^2)\quad \therefore\quad BC^2=2BM^2+2m^2-b^2$ …②

⊿PAD と⊿PBC において，余弦定理より，$\mathrm{PC}=\sqrt{2}a$，$\mathrm{PD}=\sqrt{2}b$ であるから，

$AD^2=a^2+\left(\sqrt{2}b\right)^2-2\cdot a\cdot\sqrt{2}b\cdot\cos(\alpha+45°)=a^2+2b^2-2\sqrt{2}ab\cos(\alpha+45°)$ …③

$BC^2=b^2+\left(\sqrt{2}a\right)^2-2\cdot b\cdot\sqrt{2}a\cdot\cos(\alpha+45°)=b^2+2a^2-2\sqrt{2}ab\cos(\alpha+45°)$ …④

①と③より，$2AM^2+2m^2-a^2=a^2+2b^2-2\sqrt{2}ab\cos(\alpha+45°)$

$\therefore\quad AM^2=a^2+b^2-m^2-\sqrt{2}ab\cos(\alpha+45°)$ …⑤

②と④より，$2BM^2+2m^2-b^2=b^2+2a^2-2\sqrt{2}ab\cos(\alpha+45°)$

$\therefore\quad BM^2=b^2+a^2-m^2-\sqrt{2}ab\cos(\alpha+45°)$ …⑥

したがって，⑤と⑥より，$AM^2=BM^2$

AM>0，BM>0，であるから，AM=BM　…⑦

⊿PCDにおいて，余弦定理より，

$$\cos\alpha=\frac{\left(\sqrt{2}a\right)^2+\left(\sqrt{2}b\right)^2-(2m)^2}{2\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}b}=\frac{a^2+b^2-2m^2}{2ab}\quad\cdots⑧$$

⊿PABにおいて，余弦定理より，

$$AB^2=a^2+b^2-2\mathrm{ab}\cos(\alpha+90°)=a^2+b^2-2\mathrm{ab}\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{AB^2-a^2-b^2}{2ab}\quad\cdots⑨$$

⑤を加法定理で変形し，⑧と⑨を代入すると，

$$\begin{aligned}AM^2&=a^2+b^2-m^2-\sqrt{2}\mathrm{ab}\cos(\alpha+45°)\\&=a^2+b^2-m^2-\sqrt{2}\mathrm{ab}(\cos\alpha\cos45°-\sin\alpha\sin45°)&&\text{（加法定理）}\\&=a^2+b^2-m^2-\mathrm{ab}(\cos\alpha-\sin\alpha)\\&=a^2+b^2-m^2-\mathrm{ab}\left(\frac{a^2+b^2-2m^2}{2ab}-\frac{AB^2-a^2-b^2}{2ab}\right)&&\text{（⑧と⑨を代入）}\\&=a^2+b^2-m^2-\left(a^2+b^2-m^2-\frac{1}{2}AB^2\right)=\frac{1}{2}AB^2\end{aligned}$$

AM>0，AB>0 より，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}\mathrm{AM}$ …⑩

よって，⑦と⑩より，⊿MABは∠AMB=90°の直角二等辺三角形である。

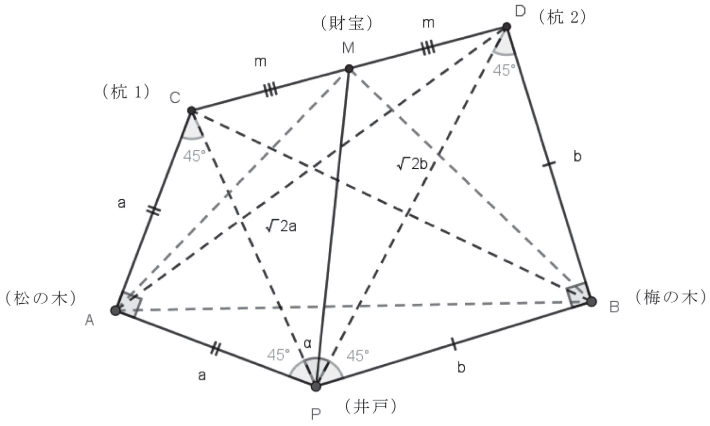

図6　余弦定理による解法

5）問題②の証明について

井戸，松の木，梅の木，桜の木，杭1，杭2，杭3，財宝を，P，A，B，C，D，E，F，Mとおく。

宝の位置Mは，点A，点B，点Cを頂点とする平行四辺形の残りの一点であることから，四角形ABCMが平行四辺形であることを示せばよい。証明も，四角形PDEFの各辺の中点を結んでできる四角形ABCMが平行四辺形になることを，中点連結定理で示すことができる。この問題は，「ガモフの宝探し」問題のような場面設定ではないが，中点連結定理の応用問題として，中学校第3学年の教科書でもよく扱われる問題である。例えば，東京書籍「新編新しい数学3」の「四角形の各辺の中点を結ぶ図形？」がある（藤井・俣野他38名，p.141-143）。問題①よりも，容易に証明できる。義務教育段階の学習内容（中点連結定理など）の定着を図る教材として，活用が可能と考える。

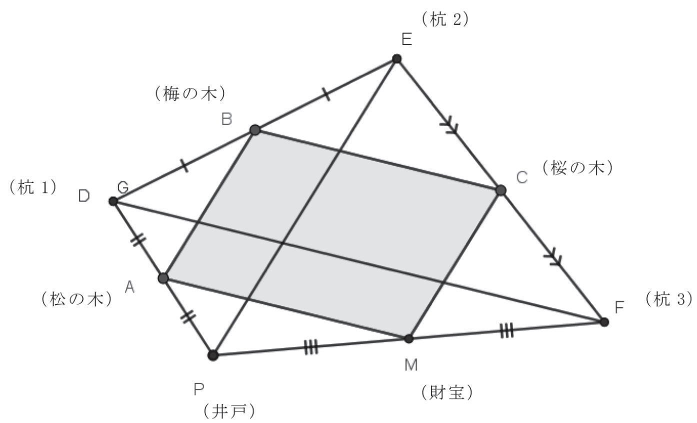

図7　問題②の証明について

第4章　「ガモフの宝探し」問題に関する調査

「ガモフの宝探し」問題（問題①，表1）について，国立大学（教育学部）の2年生32名（数学又は理科を専攻）を対象に調査を行った（2018年4月上旬）。その結果，「ガモフの宝探し」問題を「以前に解いたことがある」学生は0人，「解いたことはないが見たことがある」学生は2人（6.3%，N=32），「初めて見た」学生は30人（93.8%，N=32）であった。学生にとってはあまり取り扱われていない問題であることが分かった。「ガモフの宝探し」問題が取り上げられているのは，現行の学習指導要領（文部科学省2009）では数学活用であり，数学活用の高校での履修率は低いことが原因の1つと考えられる。実際，2014年度の数学活用の教科書の採択率は，高校数学の教科書の全採択数の0.6％である（基礎からの高校数学[参考書・問題集データベース]「2014年度高校数学教科書採択状況」，https://navy.ap.teacup.com/chief/179.html，2019/8/15最終参照）。

また，問題①（表1）と問題②（表2）について，同じ学生を対象に，それぞれに表3の3つの調査事項を課した（2018年4月上旬，「理数科クロスカリキュラム論」の授業時間の約20分間で実施）。その結果は，図8と図9の通りである。

表3　「ガモフの宝探し」問題に関する調査事項

1	メッセージに書かれたある島の地図を図示してください（図示）。
2	財宝の位置はどこになりますか（財宝の位置の特定）。
3	2で示した財宝の位置が正しいことを証明してください（証明）。

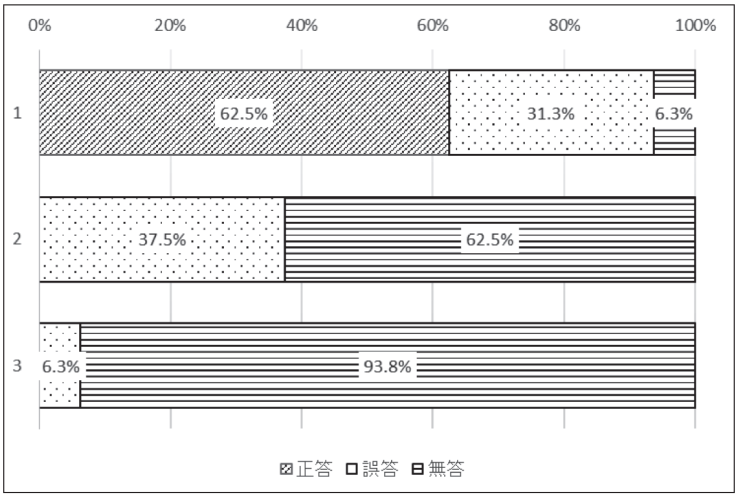

図8　問題①の結果（N=32）

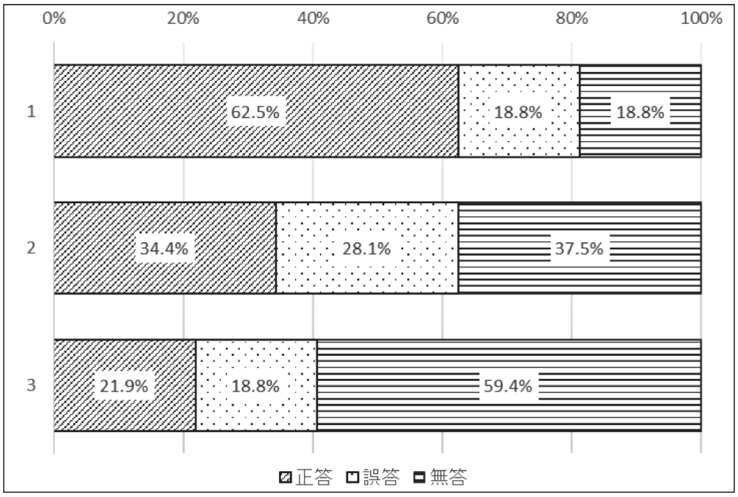

図9　問題②の結果 (N=32)

問題①については，62.5%（N=32）の学生しか，正しく図を書けていない（図8の1）。財宝の位置を特定できた学生はいなかった（図8の2）。しかも，財宝の位置について62.5%（N=32）の学生は無答であった（図8の2）。このことより，問題①のような問題に慣れていないか，或いは，難しすぎることが考えられる。課題②は，問題①の結果と同様に62.5%（N=32）の学生が正しく図を書くことができ（図9の1），34.4%（N=32）の学生が財宝の位置を特定することができ（図9の2），21.9%（N=32）の学生が証明をすることができた（図9の3）。問題①よりも，問題②の方が問題の構造が単純と考えられるが，それでも証明までできた学生は21.9%（N=32）の学生である（図9の3）。これでは，これらの問題を扱って指導しても,難しいという印象だけが残る可能性がある。「ガモフの宝探し」問題は，井戸の位置が分からなくても，財宝の位置を見つけることができるという面白さがあり，数学と日常との関連性や数学の有用性を感得できるよい教材と考えらえる。しかし，そのような教材のよさを感得するには，生徒にとっては難しい問題であるということが示唆される。「ガモフの宝探し」問題のよさを生かして，学習の遅れがちな生徒でも意欲的に取り組むことができる問題の開発が必要である。

第5章　「ガモフの宝探し」問題の改題の開発

義務教育段階の内容の確実な定着を図る指導のための教材として，「ガモフの宝探し」問題の改題の活用を考える。具体的には，「ガモフの宝探し」問題そのものを活用するのではなく，「ガモフの宝探し」問題のように，井戸の位置を変えても，財宝の位置は変わらないような問題を開発し，開発した問題を用いた指導事例を提案する。第4章では，問題①（「ガモフの宝探し」問題）より簡単と考えられる問題②でも，学生にとって難しいことが分かった。そこで,問題②よりもさらに問題を単純化した問題を開発することにした。開発した問題は，問題③（表4）が中点連結定理，問題④（表5）が平行四辺形の性質，問題

⑤（表6）が三角形の重心を利用した問題である。以下に，問題③と問題④の問題と解答例，問題⑤を示す。

表4　問題③（中点連結定理の利用）

問題③ 　次のメッセージを頼りに，財宝を探しましょう。井戸は朽ち果ててなくなっている。 ・井戸から松の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進み杭１を打て， ・その杭１から梅の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進み杭２を打て， ・杭２と井戸との中点に杭３を打て， 杭１と杭３の真ん中の地点に財宝を埋めた。

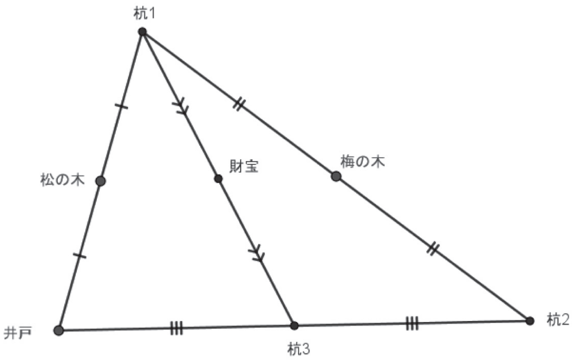

図10　問題③（中点連結定理の利用）

（証明）「財宝は松の木と梅の木の中間の位置にある」ことを示す。

井戸，松の木，梅の木，杭1，杭2，杭3，財宝を，P，A，B，C，D，N，Mとおく。

⊿PCNにおいて，PA=AC，NM=MCであるから，中点連結定理より，

AM//PN，2AM=PN

⊿DCNにおいて，DB=BC，NM=MCであるから，中点連結定理より，

BM//DN，2BM=DN

したがって，点Pと点Nと点Dは同一直線上にあり，PN=NDだから，

点Aと点Mと点Bは同一直線上にあり，AM=MB

ゆえに，財宝Mは，松の木Aと梅の木Bの中点にある。

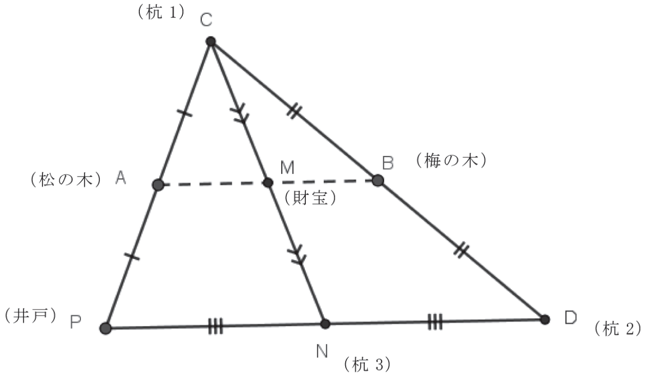

図11　問題③（中点連結定理の利用）の証明

（問題③の別解）「財宝は松の木と梅の木の中間の位置にある」ことを示す。

井戸，松の木，梅の木，杭1，杭2，杭3，宝をP，A，B，C，D，E，Mとおき，ABの中点をNとおく。また，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$とおく。

$$\overrightarrow{PM}=\frac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PE}}{2}=\frac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}/2}{2}=\frac{\overrightarrow{PC}+\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}\right)/2}{2}=\frac{2\overrightarrow{PA}+\left(2\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{CB}\right)/2}{2}=\frac{2\vec{a}+\left(2\vec{a}+2\left(-2\vec{a}+\vec{b}\right)\right)/2}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\overrightarrow{PN}$$

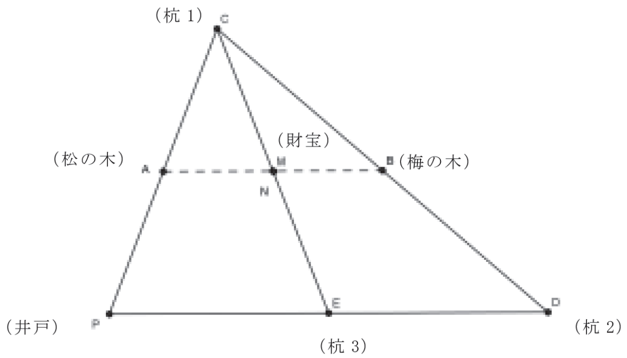

図12　問題③（ベクトルの利用）の証明

表5　問題④（平行四辺形の性質の利用）

問題④次のメッセージを頼りに財宝を探しましょう。井戸は朽ち果ててなくなっている。

・井戸から松の木までまっすぐ進み，

・そこから「井戸から梅の木へ進む向きと同じ向き」に

「井戸から梅の木までの距離と同じ距離」を進み，そこに杭を打て，

その杭と井戸の真ん中の地点に財宝を埋めた。

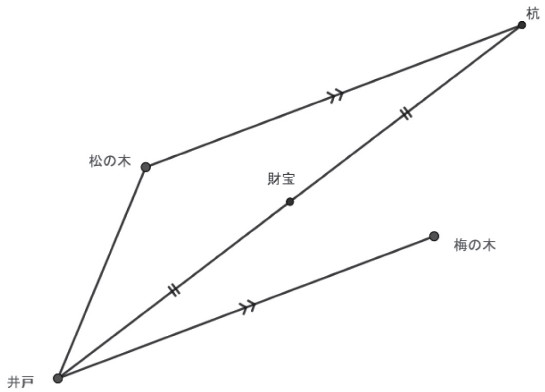

図13　問題④（平行四辺形の性質の利用）

（証明）「財宝は松の木と梅の木の中間の位置にある」ことを示す。

　井戸，松の木，梅の木，杭，財宝を，P，A，B，C，Mとおく。
条件より，AC=PB，AC//PBであるから，四角形PACBは平行四辺形である。
平行四辺形の対角線は，互いの中点で交わるので，MC=MPより，AM=MB
よって，財宝Mは松の木Aと梅の木Bの中点になる。

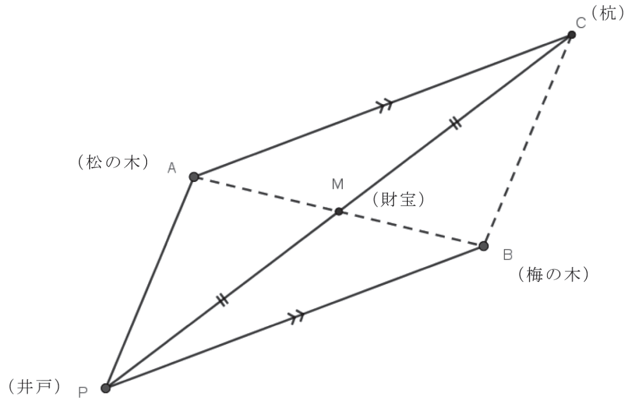

図14　問題④（平行四辺形の性質の利用）の証明

表6　問題⑤（三角形の重心の利用）

問題⑤ 次のメッセージを頼りに，財宝を探しましょう。井戸は朽ち果ててなくなっている。 ・井戸から松の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進み杭１を打て， ・その杭１から梅の木までまっすぐ進み，杭１と梅の木の中点に杭２を打て， ・梅の木から井戸までまっすぐ進み，梅の木と井戸の中点に杭３を打て 杭１と杭３を結んだ直線と井戸と杭２を結んだ直線の交点の地点に財宝を埋めた。

問題⑤の図及び，解答と証明については省略する。

第6章　「ガモフの宝探し」問題の改題に関する調査

開発した問題③について，国立大学（教育学部）の3年生32名（数学又は理科を専攻，問題①と問題②について調査した学生と同じ学生）を対象に，先の表3の3つの調査事項「1　メッセージに書かれたある島の地図を図示してください（図示)。 2　財宝の位置はどこになりますか（財宝の位置の特定)。 3　2で示した財宝の位置が正しいことを証明してください（証明)。」を課した（2019年5月上旬，問題①と問題②を調査した時期の約1年後，「ICTを活用した理数教育」の授業時間の約20分間で実施)。その結果は図15から図17である。

調査事項1（図示）は，メッセージの内容を図示する問題であるが，問題①や問題②よりも図示できた学生は68.8%（N=32）とやや増加したが，31.3%（誤答12.5%，無答18.8%）の学生（N=32）は正しく図を描くことができないことが分かった（図15)。問題の構造を簡単にしても，問題文を読み取り，その条件に合った図を描くことは，学生にとっても容易ではないことが示唆される。調査事項2（財宝の位置の特定）は，財宝の位置を特定することであるが，問題③では約半数（46.9%，N=32）の学生が財宝の位置を特定することができた（図16)。しかし，問題②の結果と同様に，約4割（37.5%，N=32）の学生は無答であった（図16)。調査事項1（図示）で正しく図が書けても，財宝の位置を特定することはできていない学生がいることになる。この原因として，「仮の井戸の位置を1つ決めて，財宝の位置を考えること」ができても，「仮の井戸の位置を複数考えて，財宝の位置を予測すること」ができていないことが考えられる。調査事項3（証明）では，問題③を証明することができた学生は25.0%（N=32）と問題②（21.9%，N=32）よりはやや増え，問題③の無答の学生（46.9%，N=32）も問題②（59.4%，N=32）より減少した（図17)。問題③は，問題②よりはやや取り組みやすくなったものの，このまま紙と鉛筆で解答を求めたのでは，井戸の位置を変えても財宝の位置は変わらないことに気付くことは難しく，また，気付いたとしても財宝の位置を特定し，理由を説明するまでに至らないことが考えられる。

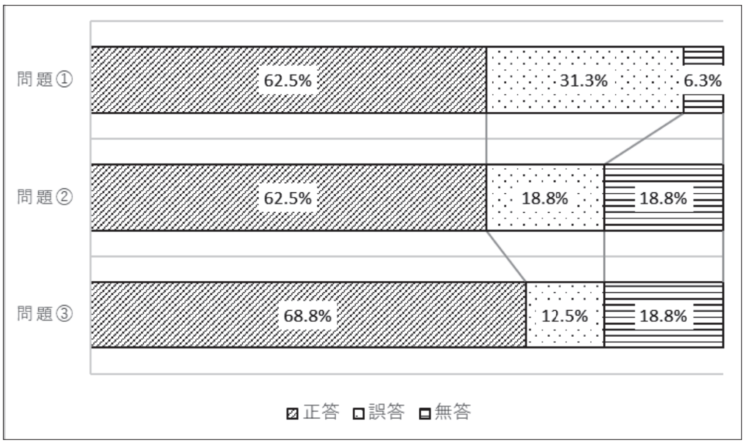

図15　調査事項1「メッセージに書かれたある島の地図を図示してください」(N=32)

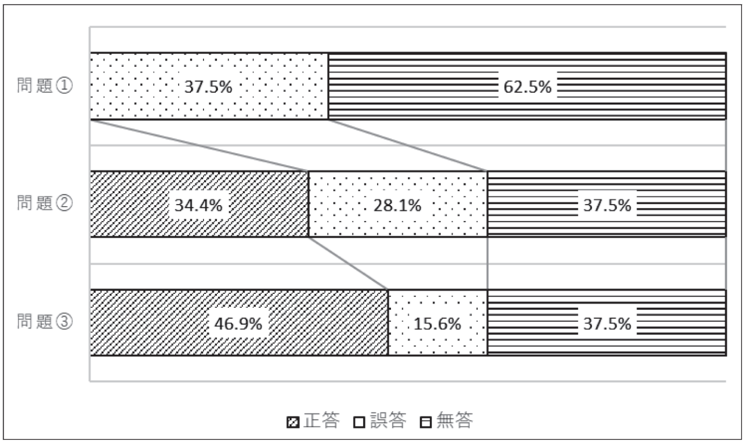

図16　調査事項２「財宝の位置はどこになりますか」(N=32)

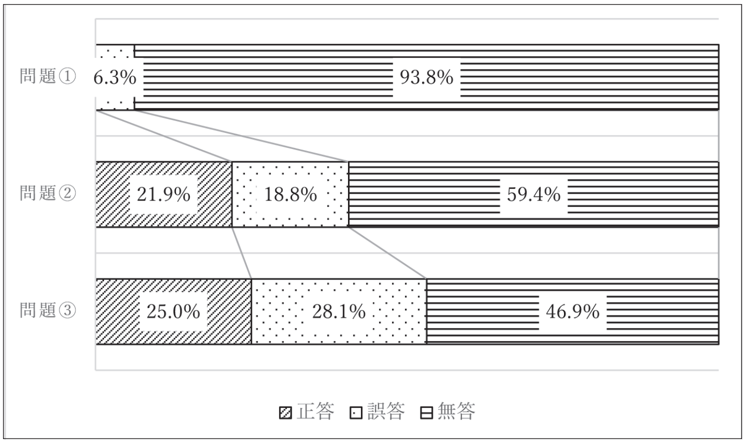

図17　調査事項３「２で示した財宝の位置が正しいことを証明してください」(N=32)

調査事項１（図示）の問題①と問題②，問題③の正答数と不正答（誤答と無答，以下同様）数について直接確率計算を行った。その結果，問題①と問題②，問題②と問題③について有意差はなかった。図示の難易度については，問題の難易度による差はないと言える。問題の難易度よりもむしろ学生の読解力に課題があることが考えられる。調査事項２（財宝の位置の特定）の問題①と問題②，問題③の正答数と不正答数について直接確率計算を行った。その結果，問題①と問題②，問題①と問題③に有意水準1%で有意な差があった（問題①と問題②は $p=0.0002$，問題①と問題③は $p=0.0000$，すべて片側）。問題②と問題③について有意差はなかった。従って，問題②と問題③は，問題①よりも財宝の位置を特定しやすかったと考えられる。調査事項３（証明）の問題①と問題②，問題③の正答数と不正答数について直接確率計算を行った。その結果，問題①と問題②，問題①と問題③に有意水準1%で有意な差があった（問題①と問題②は $p=0.0054$，問題①と問題③は $p=0.0024$，すべて片側）。問題②と問題③について有意差はなかった。従って，問題②と

問題③は,問題①よりも証明しやすかったと考えられる。つまり,開発した改題(問題③)は,「ガモフの宝探し」問題(問題①)よりも難易度が低いが,「ガモフの宝探し」問題の類題(問題②)と同程度の難易度の問題であると考えられる。

また,先と同様の学生を対象に,課題③について,(1) 難しさを感じる(困難性),(2) 興味をもって取り組める(興味),(3) 生活との関連性を感じる(関連性),(4) 解法の多様性を感じる(多様性),(5) 数学の有用性を感じる(有用性),(6) 数学のよさがわかる(よさ)の6点について,4件法(そう思う どちらかと言えばそう思う,どちらかと言えばそう思わない,そう思わない)でアンケート調査を行った(2019年5月上旬)。その結果は,図18の通りである。

問題③は,問題①や問題②よりも,財宝の位置を特定することができた学生が増加し(図16),証明ができた学生もやや増えた(図17)にもかかわらず,多くの学生(「(1) 困難さを感じる」に「そう思う」又は「どちらかと言えばそう思う」と回答した割合は90.7%)は,問題③に困難性を感じたことが分かった(図18の困難性)。問題③は,中学校までの既習事項(中点連結定理)で解決できるが,このような問題に慣れていないことが考えられる。しかし,「(2) 興味を持って取り組める」や「(5) 数学の有用性を感じる」の質問項目からは,この問題③に対する興味(肯定的回答の割合は84.4%,肯定的回答は「そう思う」又は「どちらかと言えばそう思う」と回答した学生の割合,以下同様)や数学の有用性(84.4%,N=32)を感得できたことが分かる(図18の興味と有用性)。また,「(4) 解法の多様性を感じる」の質問項目からは,解法の多様性(78.2%,N=32)を感じることができた学生が多くいたことが分かるが,多くの学生は初等幾何による証明のみであり,どこに多様性を感じたのかが不明であり,さらなる調査が必要である(図18の多様性)。「(3) 生活との関連性を感じる」や「(6) の数学のよさがわかる」に関する質問項目からは,生活との関連性や数学のよさについては,多くの学生は肯定的に回答(関連性75.0%,よさ78.1%,N=32)していたが,「そう思う」と強く肯定した学生は他の項目と比較して少なかった(関連性15.6%,よさ25.6%,図18の関連性とよさ)。今回は,プリントで問題③を提示し解答を求めるだけであったが,実際の授業では,ICT(図形ソフト)を活用するなど,導入や展開での工夫が不可欠であると考える。そこで,次章では,ICT(図形ソフト)を活用した指導事例を構想し提案する。

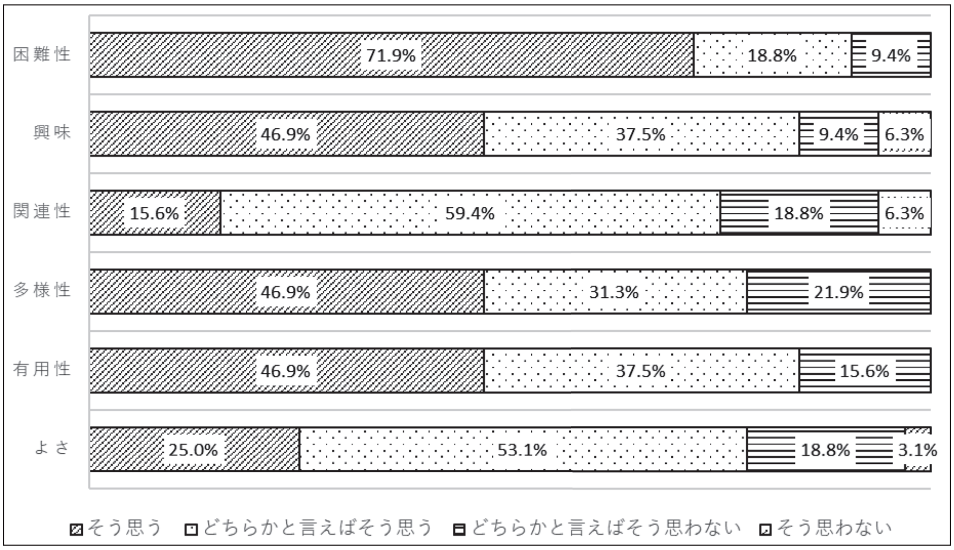

図18　アンケート調査の結果 (N=32)

第7章　「ガモフの宝探し」問題の改題を活用した指導の構想

「ガモフの宝探し」問題の改題を活用した指導を構想し提案する。学習指導案は表7の通りである。問題③を提示し，まずは生徒が個別に問題場面を図示する。重要なのは，井戸の場所を仮に決めることである（step1）。数学が苦手な生徒の場合，井戸の位置が示されていないために，問題場面の図が描けない状況がある。仮に決めた井戸の位置から，問題の条件を満たすように財宝の位置を決めることができることが大切である。次に，重要なことは，井戸の位置を他の場所に移した場合に，財宝の位置がどう変わるかということを考えることができることである（step2）。井戸の位置を，2から3か所位変えて，財宝の位置を考えることで，財宝の位置を特定することができる（step3）。ここでは，紙と鉛筆で考えた後に，ICT（図形ソフト）を用いて作図をする。仮に決めた井戸の位置を動かすと，財宝の位置はどう変わるかを観察する。ここで大切なことは，井戸の位置を動かしたときに，財宝の位置の変化にだけ着目するのではなく，井戸の位置を動かすことで，財宝の位置以外でも，図の中の図形の形や辺の長さ，角の大きさ，それらの関係など，変化するものと変化しないものに着目することである。それらに着目することで，証明の手立てを得ることができる。最後に，それらを基に特定した財宝の位置が正しい理由を考えること（step4）が重要である。step1からstep4までを紙と鉛筆だけで進めることができればよいが，難しいときには，ICT（図形ソフト）の活用が有効である。また，step3の段階で，ICT（図形ソフト）を活用することで井戸の位置をどこに変えても，財宝の位置が変化しないことを確認したり，証明を考える手立てとなる。

図形ソフトは，Ti-NspireかGeogebraなどの図形機能を活用する。これらの問題の解決に使用する機能は，①点をとる，②線分を引く，③コンパス，④半直線を引く，⑤交点をとる，⑥中点をとる，⑦点を動かす，⑧平行線を引く（問題④のみ），⑨垂線を引く（問題

①のみ）の９つのコマンドだけである。問題③に限れば，７つのコマンドだけで作図が可能である。これらの問題を解決する前に７つのコマンドを使用した作図を練習しておけば，step1 の段階から ICT（図形ソフト）を活用して，問題状況を図形ソフトで作成することが可能である。条件の通りに図を作成後に，井戸を動かすことで，財宝の位置が変化しないことが視覚的・体験的に理解できる。

表７　「ガモフの宝探し」問題の類題を活用した指導の学習指導案

<table>
<tr><th></th><th>主な学習活動</th><th>指導上の留意点など</th></tr>
<tr><td rowspan="3">導入
（10 分）</td><td>1.問題③を提示する。</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">次のようなメッセージの書かれたある島の地図を発見しました。そこで，その島に行ってみると，松の木と梅の木はありましたが，井戸は朽ち果ててなくなっていました。さて，あなたは財宝を発見できるでしょうか？
・井戸から松の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進み杭１を打て，
・その杭１から梅の木までまっすぐ進み，そのまま同じ距離だけ進み杭２を打て，
・杭２と井戸との中点に杭３を打て，
杭１と杭３の真ん中の地点に財宝を埋めた。</td></tr>
<tr><td>2.問題場面を図示する。
・生徒各自でノートに図示する。
・何名かの生徒に発表してもらう（生徒のノートを拡大投影機で表示し，クラス全体で共有する）。</td><td>・図示できない生徒には，「井戸の位置は分からないけど，こういう場合にはどうすればよいか」を問う。
・「井戸の場所を仮に決めること」をヒントとして与える（step1）。</td></tr>
<tr><td>展開
（40 分）</td><td>3.財宝の位置を探す。
(1) 財宝の位置を予想する。
・図示した結果を基に，財宝の位置を予想する。
・予想した財宝の位置を発表する。
(2) 財宝の位置を特定する。
・井戸の位置が分からない場合はどのようにして財宝の位置を見つければよいかを考える。
(3) ICT を活用し，井戸の位置を仮に決め，問題の条件に合うように図示する。
(4) ICT 上の図の井戸の位置を動かし，財宝の位置の変化を視覚的・体験的に確認する。</td><td>・財宝の位置を予想でいない生徒には，「仮に決めた井戸の位置が変わった場合には，財宝の位置がどう変わるかを考える」ことをヒントとして与える（step2）。
・井戸の位置を２から３か所位変えて，財宝の位置を考えることで，財宝の位置を特定できる（step3）。
・財宝の位置を数学的表現を使って言える。
・ICT を用いた作図は，全員で作図方法を確認しながら進める（作図のための７つのコマンドを確認する）。
・井戸の位置を動かしたときに，財宝の位置の変化だけに着目するのでは</td></tr>
</table>

	4.特定した財宝の位置が正しい理由を考える。 ・既習事項（中点連結定理）を活用して証明する。	なく，図の中の図形の形，辺の長さ，角の大きさ，それらの関係など，変化するものと変化しないものにも着目する。 ・図示した桜の木や梅の木，杭の位置などに記号を付けて，正しい理由を考える（step4）。
終結 （10分）	5.問題④を考える。 ・生徒各自で問題④に取り組む。 ・各自の解答をグループごとに発表し合う。	・問題③と同様のstep1~4で考える。 ・ICT（図形ソフト）を使って考えてもよい。このとき，「⑧平行線を引く」コマンドを説明する。
	次のメッセージを頼りに，第二の財宝を探しましょう。 ・井戸から松の木までまっすぐ進み， ・そこから「井戸から梅の木へ進む向きと同じ向き」に 「井戸から梅の木までの距離と同じ距離」を進み，そこに杭を打て， その杭と井戸の真ん中の地点に財宝を埋めた。	

第8章　まとめと今後の課題

本研究では，高校における義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための指導を視野に，「ガモフの宝探し」問題の改題の活用の可能性について考察した。「ガモフの宝探し」問題は，日常との関連性や数学の有用性を感得し，生徒の学習意欲の向上を図ることができる可能性がある一方で，その解決（証明）は難しいことが分かった（第4章）。そこで，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための指導でも活用できるように，「ガモフの宝探し」問題のよさを生かしながら問題の構造を単純にした改題を開発した（第5章）。学生を対象とした調査では，開発した改題は，まだ解法（証明）の困難性は残るものの，日常との関連性，解法の多様性，数学の有用性やよさなどを感得し，興味の向上を図ることができる可能性があることが示唆された（第6章）。また，その改題を活用した指導として，step 1からstep 4のスモールステップで指導を行うとともに，ICT（図形ソフト）を活用して視覚的・体験的に指導を行う指導事例を提案し，開発した改題は義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための指導の教材として十分に活用が可能であることを述べた（第7章）。今後は，今回開発した問題③から問題⑤を活用した指導を中学校や高校で実際に行い，授業を詳細に分析し，開発した改題を活用した指導の効果を検証することが課題である。

＜付記＞

・本研究の調査にご協力頂いた学生に感謝いたします。

・ジョージ・ガモフ（George Gamow，1904-1968）は，ロシア生まれの物理学者で，「ガ

モフの宝探し」問題は，彼が複素数の計算の重要さを強調するために，科学啓蒙書「１，２，３・・・無限大」の中で取り上げた問題である（水谷編2009）。

・本研究の一部は科学研究費補助金「基盤研究（C）」課題番号JP18K02650によって行われた。

＜参考・引用文献＞

愛媛県立松山南高等学校『「ガモフの宝探し問題」に対するアプローチ』，大阪府立大手前高等学校数学科2011年度コアSSH「数学」研究報告書，https://otemae-hs.ed.jp/ssh/dat/2011mathfesta.pdf, 2011,p.22．（2019年８月２日最終参照）

藤井斉亮，俣野博ほか38名『新編新しい数学3』，東京書籍，2015，pp.141-143．

岐阜県立関高等学校『スーパーグローバルハイスクール報告書』，https://school.gifu-net.ed.jp/seki-hs/sgh/html/pdf/h30_sghjoho_gougai2. pdf，2017，pp.67-68．（2019年８月２日最終参照）

水谷仁編『Newton別冊虚数がよくかわる』，ニュートンプレス，2009，pp.82-85．

文部科学省『高等学校学習指導要領解説数学編理数編（平成21年12月）』，実教出版，2009，pp.59-65．

文部科学省『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説総則編（平成30年７月）』，東洋館，2019a．

文部科学省『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説数学編理数編（平成30年７月）』，学校図書，2019b．

根上生也ほか５名『数学活用』，新興出版啓林館，2012，pp.28-29．

滋賀県立彦根東高等学校『スーパーサイエンスハイスクール構想』，http://www.hikonehg-h.shiga-ec.ed.jp/blog/wp-content/uploads/2016/04/ 42392.pdf，2016，p.16．（2019年８月２日最終参照）