

幼・小・中一貫した数学的活動を通じたカリキュラム開発に関する研究（最終年度）

—より豊かな図形指導のあり方を目指して—

工藤 真以* 高橋 文子** 片島 美津子*** 中村 好則**** 山崎 浩二***** ほか9名

*岩手大学教員学部附属中学校, **岩手大学教員学部附属幼稚園,

岩手大学教員学部附属小学校, * 岩手大学教育学部, ***** 日本大学文理学部

(令和3年3月4日受理)

1. 研究の背景および目的

本研究は、数学的活動を通じた授業づくりの視点から、県内の児童・生徒の算数・数学の確かな学力の向上について、大学と附属学校および地域の公立学校が連携しながら考察していくものである。

県内の子どもたちの算数・数学の確かな学力を伸ばすための方策として、子ども自らが数学的に考える力をつけていくとともに、数学的に表現し伝え合う力をもつけていくための授業改善が最早欠かすことのできないものとなっている。そのための授業づくりは、数学の概念の習得と能力の習得を一体として考えること、過程としての数学も重視すること、さらには活動そのものの楽しさを実感することをも目的とした、数学的活動を通じた授業のより一層の充実を図っていく必要がある。(山崎他 2019)

本研究の目的は、算数・数学科における数学的活動を重視した幼・小・中一貫したカリキュラムの開発とその授業づくりの在り方を、大学と附属学校及び地域の公立学校が共同で、理論的かつ実践的に進めることである。今年度は、その最終年度と位置づけ、これまでの研究で得られた知見を総括する。

2. これまでの研究の経緯と今年度の位置付け

本研究は、平成29年度より4年間、授業研究を中心に継続して進めてきた。特に、第2年次(平成30年度)からは、「図形」領域の内容についてのカリキュラム案を検討し、段階的、系統的にその授業実践と改善に努めてきた。以下、その経緯を簡単に記し、今年度の研究を位置づけることとする。

(1) 平成29年度(第1年次)

「数と計算」、「数と式」領域に関する内容につい

て検討し、主として、数に対する感覚、数、計算、式などにおける資質・能力、育てたい力について、数学的活動の観点から整理した。特に、体験的な活動を通して数感覚を育むこと、図や式などを用いて計算の意味や仕方を考えて説明を促すこと、さらには、数の性質などを帰納的、演繹的に考察することなどを中心に、系統的に数学的に考える力をつけていく授業づくりの在り方について言及した。

(2) 平成30年度(第2年次)

「数や図形」(幼稚園)、「図形」(小学校・中学校)に関する内容について、幼・小・中一貫したカリキュラム案を作成し、図形に対する感覚、図形の指導を通して育まれる資質・能力について、数学的活動の観点から整理した。特に、体験的な活動を通して図形の感覚を育むこと、子ども自らが図形の特徴を見いだせるようにしていくこと、帰納的、演繹的に図形の性質を考察すること、図形の性質を統合的・発展的に考えて創造的な学習を促すことなどを中心に、系統的に数学的に考える力をつけていく授業づくりの在り方について言及した。

(3) 令和元年度(第3年次)

前年度(第2年次)に作成したカリキュラム案に則り、段階的、系統的に授業実践を行い、より質の高いものにしていくための検討を重ねた。特に、研究協力者による研究会合での様々な議論や授業研究会に参加した小・中学校教員のアンケート結果などにに基づき、図形指導の課題とその留意点についても検討した。その中では、概念形成と操作との関連の難しさ、形式的な指導になりやすいことへの懸念、空間概念を育成するための指導の在り方、論証指導の困難性、数学的活動の目的意識の設定の難しさ、

などが指摘された。これらを踏まえ、図形指導の課題とその留意点について、以下の10点にまとめた。

- ① 具体的な操作を言語化するとともに、操作の目的を明確にしていくこと
 - ② 「問い返し」や「問い直し」を通して、直観的に捉えたものを論理的に説明すること
 - ③ 空間図形の学習を充実させること
 - ④ 式と図形を関連付けるなど図形の見方・考え方を豊かにしていくこと
 - ⑤ 幼・小・中の学習内容の系統を理解すること
 - ⑥ 図形の関係や性質を統一的・発展的に考察すること
 - ⑦ 数学的な推論の違いを早期より自覚させること
 - ⑧ 過程としての算数・数学を重視すること
 - ⑨ 誤答例も積極的に生かすこと
 - ⑩ 問題解決としての図形の指導を充実すること
- (4) 令和2年度(第4年次・今年度(最終年度))

今年度は、その課題と留意点を踏まえた授業実践とその検証を試みるともに、より豊かな図形指導のカリキュラムと指導の在り方について総括した。

3. 研究組織と概要

今年度の研究組織は、県内幼稚園教員1名、小学校教員7名、中学校教員4名、大学教員2名の計14名で構成している。研究会合は2回(12月・1月いずれもオンラインによる)実施した。なお、これまで毎年実施していた授業研究会は、感染症防止のため中止している。

4. 研究の内容

(1) 図形領域のカリキュラムの見直し

カリキュラムは、幼・小・中12年間の図形に関わるすべての内容(「数や図形」(幼稚園)、「図形」領域(小学校・中学校))について、「学習内容」・「育てたい数学的な見方・考え方」・「数学的活動を通した授業例」の3つの項目で構成している。「学習内容」については、県内で使用する令和2年度版小学校用教科書及び令和3年度版中学校用教科書に対応させ、それぞれの学年の単元内容ごとにまとめている。「育てたい数学的な見方・考え方」については、片桐(2004)の数学的な考え方を参考に、①数学の方法に関するもの、②数学の内容に関する

もの、③数学的な態度に関するものに分類し、それぞれその主なものを記している。「数学的活動を通した授業例」については、学習指導要領の例示なども参考に、本研究の中で実践したもの、実践には至っていないが想定できるものなどを記している。カリキュラムの見直しにあたっては、幼稚園は高橋、小学校1年・5年は檜木、2年・4年は沼川、3年は片島、6年は菊池、中学校1年から3年までは浅倉がそれぞれ担当した。なお、作成したカリキュラムは資料として掲載する。

(2) 図形指導の課題の改善のための授業実践

顕在化した図形指導の10の課題とその留意点について、その改善を図るための7つの授業実践を試みた。以下、その概略である。(括弧内は実施学年と授業者名。なお、詳細は資料として掲載する)

① 授業実践1(幼稚園年長児：高橋文子)

・日常生活の中で数量や図形などに関心をもたせる授業

幼稚園での学びでは、具体物の観察や操作を通して、形に関心を持たせ、表現する仕方を見いだし、感覚を豊かにしながら、形の認識、弁別、構成の素地が養われていた。例えば、教員が三拍子に合わせて「さんかくの歌」を唄って三角形を感覚的に認識させたり、「さんかく」の積み木どうしを合わせて「しかく」にさせたりするなど、多様な遊びや活動を通して、楽しみながら自然と形に親しむことで、形に対する感性を育てている。

このような活動の工夫を通して、園児の多くが、「さんかく」や「しかく」を認識することまでできていた。5歳児に至っては、それをある程度かくこともできる。また、「ぴったり合わせようね」などの声かけから、形だけでなく辺や角(かど)にも着目する子も少なくなかった。さらには、形の「仲間分け」まではしないが、「同じもの(かたち)」「違うもの(かたち)」という認識は、遊びを通して認識できている子が多かった。

このように、幼稚園での活動の内容について関心を持ち、園児の図形に対する認識を理解するとともに、小学校低学年での学習との連携のあり方についても今後検討する必要がある。

② 授業実践2 (小学校第3学年：白石円)

・図形の構成要素に着目し、二等辺三角形の概念をより豊かにする授業

児童は、たとえ作図ができて、必ずしも図形の構成要素(辺、頂点)に対する認識までであるとは限らない。そこで、二等辺三角形の作図を通して、正しくかく技能を身に付けるとともに、図形の意味や性質をより深く考察することを目的とした。

本時では、複数の二等辺三角形の特徴を観察したり、底辺以外の二辺の長さを自由に変えて多様な二等辺三角形をつくらせたりする問題場面を設定した。このことで、「二辺を同じ長さにしている」ことや作図には「二辺が分かればよい」ことなどを子どもから引き出し、辺に対する意識を高めることができた。また、二等辺三角形を線対称な図形と捉えたり、底辺が同じであればその頂点が一直線上に並ぶ性質なども見いだしたりするなど、子どもたちが図形の見方を深めていく姿も見られた。

③ 授業実践3 (小学校第5学年：佐々木一向)

・式と図形を関連させ、筋道立てて説明する授業

小学校の図形の学習では、直観的に捉えた事柄を論理的に考察する機会が少ないことから、問い返しや問い直しを意図的に取り入れ、子どもの中にある論理を引き出し、式と図形を関連付けながら面積の求め方の理解を図ることを目的とした。

3つの異なる図形の面積を比較させ、既習の形に変形して求積しようとする見方・考え方を引き出すとともに、「形が変わってしまうけど、大丈夫かな」と問い返すことで、「底辺と高さが同じであれば、形が変わっても面積は同じ」という論理を引き出し、式と結びつけながら全体で共有した。また、中盤からは、同じ面積の図形をもう一つ示し、「本当に等しくなるか」「他のやり方はあるか」などと問い返すことで、直観的に予想した事柄を論理的に考察しようとする子どもの姿が継続的に見られた。

④ 授業実践4 (小学校第6学年：宮崎大地)

・作図の方法を統一的・発展的に考察する授業

作図が形式的な指導になりがちであることから、その方法の意味理解を深めるとともに、中学校の相似な図形の学習との連携をも目的とした。

1つの頂点をもとにした拡大図のかき方を共有した後、「頂点以外の点をもとにしてもかけるか」と発展的に問いかけることで、最初のかき方の意味を捉え直し、拡大図のかき方を統一的に見ることを引き出そうとした。最初はかき方がわからず戸惑う姿も見られたが、「同じように考えればいい」という言葉を子どもから引き出し、子どもたちの手でかき方を創り出していく姿が見られた。

⑤ 授業実践5 (中学校第1学年：稲垣道子)

・作図の方法を見だし、その根拠を論理的に考察する授業

作図が形式的な指導になりがちであることから、単元全体での学習を通して、作図の方法の意味理解を深めていくとともに、その理由を論理的に考察できるようにすることを目的とした。

正方形の作図や基本作図などで、生徒自ら作図の方法を見いだすことを促すとともに、つねに「なぜそのかき方でよいのか」、「本当にかけているのか」と意図的に問い返すことで、単元の学習を通して、既習を根拠として説明しようとする姿が見られるようになってきた。

⑥ 授業実践6 (中学校第2学年：藤原英文)

・証明の意味理解を図るとともに、図形の性質を論理的に考察する授業

証明の構想が立てられない、証明は書いても証明そのものの意味が理解できていない、などのいくつかの課題の改善を目的とした。

生徒自らが証明の構想が立てられるよう、単元の学習を通して段階的に指導を工夫したり、条件に合った図を生徒自ら書かせて証明の意味を理解させる導入を図ったり、証明を読ませ足りないものを補わせるなどの工夫を施すことで、証明の意味理解が少しずつ図られていく様子が見られた。

⑦ 授業実践7 (中学校第3学年：工藤真以)

・既習を活用して問題解決を図るとともに、その根拠を論理的に考察する授業

単元全体での学習を通して、図形の相似の意味を確実に理解するとともに、相似を用いて問題解決を図る力を育むことを目的とした。

導入時に与えた課題(線分を3等分する方法を考

察する)を単元の終盤でも再び問うことで、生徒自らが学びを振り返り、その変容を意識できるよう計画した。授業者が単元の学習内容を見通し、その所々での生徒の気付きを意図的に顕在化していくことで、相似の意味理解が深まっていく姿や、既習を基にかき方の意味を説明し合うようになるなど、論理的に考察しようとする姿なども見られた。単元を通して、生徒自らが問題解決に対する学びの変容を自覚する姿も見られた。

5. 授業実践から得られた示唆

(1) 作図を通して図形の性質を深めること

作図の指導については、前田(1979)も指摘するように、概念の形成と理解とその確認、性質の認知と理解とその確認ならびに適用、創造的・発見的な思考力の伸長、の3つのねらいがある。作図という操作とその観察を通して、基本図形の概念が培われ、次第に熟成されていく。

例えば、小学校では、平行四辺形を実際にかき続けることで、直観的に平行四辺形の持ついくつかの性質、そして併せて平行という概念もわかっていく。わかることでかく方法もより広がる。したがって、かき方を形式的に教えるだけでなく、作図する過程での事柄の意味が子どもに自覚されるようにしていくことが大切である。

中学校においても、平面図形の作図や移動の学習が技能の習得に終始する傾向にあるが、作図の方法を生徒自らが多様に見いだしたり、作図できた根拠を小学校での学習内容を根拠にして説明したり、図形の移動と関連付けて考察するといった数学的活動を意図的に設定し、論理的かつ創造的に考察する指導をより大切にすべきである。

作図の仕方からは、子どもがその図形をどう見ているのかもわかる。かき方を説明し合う、どんな特徴を使ったのか確認し合う、定規やコンパスはどんな役割を担ったのか、その方法を使えばいつでもかけるのか、などについても振り返り、かきながら深める、かくことで理解が深まっていく、といった数学的活動が大切であろう。

(2) 低学年では幼稚園での学びとも連携すること

幼稚園では、豊かな「遊び」という体験に基づい

た様々な「形」に関する活動を数多く行っていた。例えば、「さんかく」「しかく」を書いたり、模様作りをしたり、形だけでなく「ぴったり合わせようね」などと辺や角(かど)にも着目させたりしている。あるいは、箱などの立体をきれいに積み上げながら面に着目させたりもしている。

幼稚園での学びでは、具体物の観察や操作を通して、形に関心を持たせ、表現する仕方を見だし、感覚を豊かにしながら、形の認識、弁別、構成の素地となる数学的活動が行われている。その活動の多くは低学年の学習内容にも通ずるものである。したがって、小学校では同じことを漫然と繰り返すのではなく、活動にねらいを持たせることが大切である。例えば、以下のような指導が考えられる。

- ・幼稚園では色板を使って自由に敷き詰めていたものを、小学校低学年では、できる形を分類したり、シルエットに合わせて形を構成・分解したり、その過程を「ずらす」「回す」「裏返す」などの言葉を使って数学的な「動き」として表現したり、文字で表現できるようにする。
- ・「どうしたら上手く作れそうかな」、「何枚使えばできそうかな」、「似たようなことをやったことがなかったかな」、「本当にそうなるかな」などの問いかけから、結果や方法に見通しを持たせたり、数学的な見方・考え方を意識させたりすることも積極的に試みる。

特に、低学年では、活動が感覚的なものに止まりがちである。操作を通して、形に親しみながら、子どもが直観的に捉える図形の様々な特徴や見方・考え方を顕在化することが大切となる。

(3) 理由や根拠を問い返す、問い直すこと

図形の構成・分解などは直観的にできてしまうことも少なくなく、またできたことで「達成」と見なされがちであるが、授業実践からは、必ずしも子どもたちの理解が伴っているとは限らなかった。三角定規やコンパスを使って基本図形を作図できたとしても、なぜその方法でかくことができたのかまで説明できる子は半数程度に止まっていた。「できた」「かけた」「作れた」の陰で、根拠が不明瞭なまま学習が進んでしまっている状況も垣間見られた。こ

これらのことは、残念ながら上学年や中学校に進んでもあまり改善されていない。

理由や根拠を問うことや、子どもの言葉に対してその意味を問い返すことや問い直すことが必要である。例えば、操作活動では、「どうしてこの折り方で正三角形がつかれるのか」を問いかけたり、基本図形の作図では、「なぜこのかき方で垂直二等分線がかけるのか」、「本当にこれで大丈夫だろうか」などと意図的に問い返したりすることで、子どもなりの論理を引き出し、その意味を確認したり、共有したりすることを通して、直観的な見方から次第に論理的な考察へと少しずつ意識させていく指導が大切である。

(4) 空間図形の学習を充実させること

直方体を見取り図にすると、表現されない後ろの面を見落とす子が見られた。実際に箱などを見せながら確認するなど具体物の観察や操作を交えた指導などが必要となるが、特に低学年では、立体を平面での表現に置き換えることへの理解がまだ覚束ない子も相当数いる。立体図形の辺や面などの位置関係についての理解も十分とは言えない。見取り図に触れる経験の多い高学年でさえ、立方体を見取り図が正しく書ける子は非常に少ないという指摘もある。(國宗他 2007) 中学校では、生徒が空間図形に対する具体的なイメージを持たないまま学習が進みがちで、十分な理解がなされていないことなどの実態も見られる。

空間図形の学習をさらに充実させる必要がある。例えば、低学年から簡単な立体の見取り図をかくなど立体を取り扱う機会を増やしたり、立体図形を構成する学習や平面図形との関連を図る学習をより系統立てたりするなどが必要であろう。

例えば、以下のような指導が考えられる。

- 立体の模型作りなどを基に、空間図形の観察、操作を通して、投影する、切断する、展開するといった空間図形を平面上に表現したり、平面上の表現から空間図形の関係や性質を見いだしたりするなど、平面図形と空間図形との間を往き来する場を意図的に設定する。
- 見いだした性質などを数学的な表現を用いて筋

道立てて説明するなどの論理的に考察する

- 平面図形や空間図形の学習内容を総合的に取り扱う問題群を設定するなど、数学的活動が連続する指導を充実させる。

特に、小学校4年から中学校1年までの空間図形のカリキュラムはさらに検討する必要がある。

(5) 子どもの素朴なつまづきを生かすこと

授業実践では、図形の指導においては、直観が論理を上回ることが少なくないとの指摘が多かった。特に、視覚からの情報にも左右されやすいため、それが大いに理解を助けてくれる反面、時には邪魔することもあった。例えば、平行四辺形や三角形などの求積の図で、高さが底辺の外にくるとその高さを見失ってしまう子がいたり、側辺を底辺と見る図では面積を求めることができなくなったりする子が出てきた。普段見慣れたものならよいが、そうではないものに出会うと途端に前へ進めなくなってしまふ子どもたちの実態がある。

このように、つまづきやすい内容については、揺さぶりをかけたり、あえて誤答を示したりするなど、意図的に取り扱う指導の工夫が考えられる。授業実践では、つまづきやすいものと比較させる問題提示をしたり、あるいは図形の条件を発展的に扱って提示したりするなどの工夫が見られたが、このような試みをもっと増えてよい。

(6) 図形を書く・触れる・作ることを通して考える経験を増やすこと

図形の学習のよさは、何と言っても、書いてみる、手に取る、操作する、という活動が可能なことである。かいてみて、触れてみてわかることも少なくない。大切なことは、「活動を通して考える」ということであろう。図形を観察して見取図にかく経験や立体を手にとって遊ぶ経験などは、幼稚園では豊かな活動の一つとして位置づけられていたが、小・中学校では学年が進むごとに次第に少なくなっていた。いつの間にか、算数・数学の学習では、図形は与えられるものとなり、自らかいたり作ったりするものではなくなってしまふようである。このことが、図形に対する見方・考え方を豊かにする機会を奪っているという指摘も少なくなかった。作業的・体験的

な学習の大切さを、今一度考えていく必要がある。

6. 主な知見と今後の課題

(1) 主な知見

① 幼・小・中 12 年間の系統性と継続性

授業者が、幼・小・中学校の図形の内容を系統的かつ継続的に捉えることは、図形についての児童生徒の確かな理解と授業者の豊かな授業実践を図る上で極めて大切である。特に、数学的に考える力、数学的に表現し伝え合う力を育むためには、長期にわたる指導が欠かせないことから、授業づくりにあたっては、より俯瞰的かつ計画的な視座が求められる。

② 図形に対する直観と論理の往き来

図形の指導では、つねに直観と論理の往き来を意識することが大切である。授業実践では、見た目や直観が論理よりも優先されることが間々見られ指摘されてきた。児童生徒の図形の概念形成や理解の様相を注意深く見ていく必要がある。授業づくりにあたっては、観察や操作を通して、形に親しみながら、子どもが直観的に捉えている図形の様々な特徴を少しずつ顕在化するとともに、子どものつまずきや子どもならではの論理にも寄り添いながら、それらを生かしたり、「問い返し」や「問い直し」などを意図的に投げかけたりしながら、次第に直観的な捉えから論理的な考察へと高めていくことが大切である。

③ 数学的活動のより一層の充実

図形の指導においても、数学的活動を積極的に取り入れていきたい。授業づくりにあたっては、豊かな作業的・体験的な活動や児童・生徒自らが創り出していく過程を重視した指導を通して、確かな理解を図ったり、深めたりすることを大切にしたい。

(2) 今後の課題

今後の課題として、以下の3点をあげる。

- ・ICTも含めた豊かな作業的・体験的な活動に基づく平面図形と空間図形を総合的に取り扱う内容の検討
- ・日常の事象での問題解決を図るための図形の学習の検討とその指導の在り方
- ・既習を基に論理的に考察する指導の体系化

本研究の推進にあたっては、表記の5名に加え、以下の9名の方々にもご協力いただいた。

菊池沙織(種市小)、佐々木一向(沼宮内小)、白石円(附属小)、檜木航平(附属小)、沼川卓也(緑が丘小)、宮崎大地(大川目小)、浅倉祥(附属中)、稲垣道子(附属中)、藤原英文(大槌学園)

また、これまでの4年間には、以下の県内外の方々にもご協力をいただいた。(勤務先は令和2年4月現在のもの)

伊東晃(洋野町教委)、川邊智津瑠(上野中)、桐山ひかり(久慈湊小)、小林龍(九戸村教委)、工藤美波(大野小)、本宮和奈(一関小)、及川光代(米崎小)、佐藤杏奈(仙北小)、佐々木愛香(胆沢中)、佐々木亘(盛岡市教委)、佐藤真(県教センター)、清水貴之(見前中)、高橋長兵(赤石小)、谷藤光明(附属小)、辻裕美香(仙北小)、外館和雅(久慈小)、藤井雅文(二戸市教委)、山本一美(湧津小)、横沢大(山目小)、渡辺葵(見前中)、渡邊奈穂子(附属幼)、渡邊剛(県教委)、細水保宏(明星大学)、加固希支男(学大附小金井小)

(参考・引用文献)

- 片桐重男(2004) 数学的な考え方の具体化と指導、明治図書
- 國宗進他(2007) 小学校算数、中学校数学、高校数学の接続を重視した幾何教育の改善に関する研究、平成16～18年度科研費研究成果報告書、静岡大学学術リポジトリ、pp.34-47
- 前田隆一(1979) 算数教育論、金子書房
- 山崎浩二他25名(2019) 幼・小・中一貫した数学的活動を通じたカリキュラム開発に関する研究(第3年次)、岩手大学教育学部教育実践研究論文集第7巻、pp.93-98

※ 授業実践及びカリキュラム表のURL

https://drive.google.com/drive/folders/luazUZpPagsyWCrltboSxNvrAaih_wGuw?usp=sharing

(閲覧希望の方はyamazaki.kouji@nihon-u.ac.jpまでご連絡ください)