

平行平板間の層流強制対流熱伝達問題の近似解析解*

千葉良一^{*1}, 泉 正明^{*2}, 菅野良弘^{*3}An Approximate Analytical Solution to Heat Transfer Problem in
Laminar Forced Flow between Parallel PlatesRyoichi CHIBA^{*4}, Masaaki IZUMI and Yoshihiro SUGANO^{*4}Department of Mechanical Engineering, Miyagi National College of Technology,
48 Nodayama, Medeshimashiote, Natori-shi, Miyagi, 981-1239 Japan

Forced convection heat transfer in a non-Newtonian fluid flow between parallel plates subjected to heat convection on the external surfaces is investigated analytically. Fully developed laminar velocity distributions obtained by a power law fluid rheology model are used, and viscous dissipation is taken into account. The effect of heat conduction in the direction of fluid flow is considered to be negligible. The physical properties are assumed to be constant. The theoretical analysis of the heat transfer is performed using an integral transform technique — Vodicka's method on the assumption that the velocity distribution is piecewise constant in the channel cross section. An important feature of the approach is that an arbitrary variation of surrounding medium temperatures in the direction of fluid flow and an arbitrary velocity distribution can be permitted. A comparison with the existing results provides a verification of this technique. The effects of the Brinkman number, outside heat transfer coefficients and rheological property on the distributions of the fluid temperature and the local Nusselt number are illustrated. Moreover, the effects of the parameters on the length of freeze-free zone are discussed in the case where the surrounding medium temperatures are below the solidification temperature of the fluid.

Key Words: Heat Transfer, Forced Convection, Non-Newtonian Fluid, Heat Exchanger, Approximate Analytical Solution, Viscous Dissipation, Graetz Problem, Channel Flow

1. 結 言

周囲から熱的負荷を受ける管内および平行平板間の強制対流熱伝達は、熱交換器内のコイルや樹脂製品の射出成形工程などに見られるように、工業的に非常に重要である。そのため、この種の熱伝達問題は古くから多くの研究者によって研究されている。特に、非圧縮性・定物性流体が十分発達した速度分布を有して流路内を流れている場合の、温度助走区間内における局所ヌセルト数を求める問題は Graetz 問題と呼ばれ、その解導出の難解さのため、工学者のみならず数学者の興味をも引いている。

通常、この Graetz 問題は半数値解法により解かれる。すなわち、支配方程式に変数分離法を適用し、導出される固有値問題のみを数値的に解く。したがって、流路内の流速分布が断面内で一様の場合(スラグ流)や放物線状で与えられる場合⁽¹⁾(ポアズイユ流)など

の特定の場合以外、この固有値問題を厳密に解くことは非常に困難である。

上記 Graetz 問題は、流体の粘性散逸や流れ方向の熱伝導を無視することで解析の簡略化を図ったものであるが、近年これらの影響を厳密に考慮した、いわゆる「拡張された Graetz 問題」も解析されてきている^{(2)~(6)}。また、非ニュートン流体を解析対象とした研究^{(7)~(13)}も盛んに行われている。しかし、それらの多くは差分法や重み付き残差法のような数値的手法により解析されており、完全に陽な形で表示された解析解は今のところ報告されていない。

そこで本研究では、周囲から熱負荷を受ける平行平板間の強制対流熱伝達問題を、流速分布が流路断面内で区分的に一定という近似のもとで、一種の積分変換法に相当する Vodicka の手法⁽¹⁴⁾を用いて数学的に解き、流体温度と局所ヌセルト数の近似解析解を導出する。本研究ではペクレ数が十分大きい範囲を対象としているので、流れ方向の熱伝導は無視しているが、粘性散逸の影響は考慮している。本手法では平板間を流れる流体の速度分布形には解析上制限がないので、ニュートン流体のみならずベキ乗則に従う非ニュートン流体

* 原稿受付 2006年9月13日。

^{*1} 正員, 宮城工業高等専門学校(☎981-1239 名取市愛島塩手字野田山48)。^{*2} 正員, 石巻専修大学理工学部(☎986-8580 石巻市南境新水戸1)。^{*3} 正員, 岩手大学工学部(☎020-8551 盛岡市上田4-3-5)。

E-mail: chiba@office.miyagi-ct.ac.jp

も解析対象とした。また数値計算結果より、ブリンクマン数、平板外表面熱伝達率および流体レオロジー特性が流体の温度分布と局所ヌセルト数分布に及ぼす影響を考察した。さらに、本近似解析解の工業分野での応用例として、平板の周囲媒体温度が平板間を流れる流体の凝固温度以下である場合に、冷却区間内での凝固を回避するのに必要な限界流速を図示した。これは熱交換器を寒冷地に設置する際に有益な資料となりうる。

記号

- A_m : 式(22)中の未知係数
 B_m : 式(22)中の未知係数
 Br : ブリンクマン数 $= \kappa u_{\max}^{1+\nu} L^{1-\nu} / \{\lambda(T_{0b} - T_s)\}$
 c : 流体の比熱
 h : 平板外表面の熱伝達率
 \hat{h} : 局所熱伝達率
 H : 無次元熱伝達率 $= hL/\lambda$
 L : 平行平板間の幅の半分
 n : 領域分割数
 Nu : 式(35), (36)で定義される局所ヌセルト数
 P_1, P_2 : 式(18)で定義される関数
 Pe : ペクレ数 $= u_m L \rho c / \lambda$
 Q : 熱発生項 $= Br \{(1+\nu)/\nu\}^{1+\nu} |\eta|^{1+\nu}$
 T : 温度
 u : x 方向の流速
 u_m : x 方向の断面平均流速
 u_{\max} : x 方向の最大流速 $= (1+2\nu)u_m/(1+\nu)$
 U : 無次元流速 $= u/u_m$
 W_1, W_2 : 式(21)で定義される関数
 x : 流れ方向座標
 X_m : 固有関数
 y : x と直交する座標
 γ_m : 固有値
 η : 無次元座標 $= y/L$
 κ : ベキ乗則モデルパラメータ
 λ : 流体の熱伝導率
 ν : ベキ乗則モデルインデックス
 θ : 無次元温度 $= (T - T_s)/(T_{0b} - T_s)$
 θ_f : 無次元凝固温度 $= (T_f - T_s)/(T_{0b} - T_s)$
 ρ : 流体の密度
 τ_{yx} : せん断応力
 ξ : 無次元流れ方向座標 $= x/(Pe \cdot L)$

下添え字

- 0: 流路入口
 1: 上側平板
 2: 下側平板
 0b: 流路入口での混合平均
 1 ∞ : 上側平板に接する周囲媒体
 2 ∞ : 下側平板に接する周囲媒体
 B: 混合平均
 f: 凝固点
 i: 分割領域番号
 s: 基準値

2 解析

2.1 解析モデルと定式化 解析モデルを図1に示す。厚さが無視できる平行平板間（以降、流路と記す）に、発達した速度分布 $u(y)$ をもった流体が流入している。流路入口における流体温度は $T_0(y)$ である。幅 $2L$ の流路は $y = L, -L$ でそれぞれ温度 $T_{1\infty}(x), T_{2\infty}(x)$ の周囲媒体と接しており、平板の外側表面の熱伝達率は h_1, h_2 である。

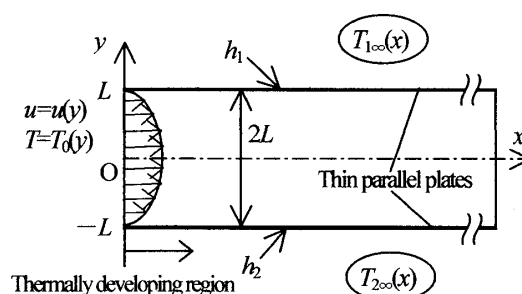


Fig. 1 Physical model and coordinate system

前述したように、本研究では流体の速度分布形に解析上の制限はない。そこで、ここでは多くの流体の非ニュートン粘性をかなり広い速度範囲にわたって良く表現できるベキ乗則流体を考える。この場合、粘性流体に働くせん断応力 τ_{yx} は式(1)で与えられる。

$$\tau_{yx} = \kappa \left| \frac{du}{dy} \right|^{\nu-1} \frac{du}{dy} \quad (1)$$

κ と ν はそれぞれベキ乗則モデルのパラメータとインデックスと呼ばれ、 $\nu < 1$ なら擬塑性流体を、 $\nu > 1$ ならダイラタント流体を表し、 $\nu = 1$ の場合はニュートン流体に相当する。この場合、 κ は粘度を意味する。発達した速度場における速度分布は式(2)で与えられる⁽¹⁾。

$$u(y) = u_m \frac{2\nu+1}{\nu+1} \left(1 - \left| \frac{y}{L} \right|^{\frac{1+\nu}{\nu}} \right) \quad (2)$$

解析をすすめるにあたり、以下の仮定を導入する。

- ① 物性値は温度によらず一定である。
- ② 平板の熱抵抗は無視できる。
- ③ 流れ方向の熱伝導は無視できる。
- ④ 流れは常に層流である。
- ⑤ 自然対流は生じない。

この場合、粘性散逸を考慮した定常時のヒートバランスは式(3)で表される⁽¹⁷⁾。

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau_{yx} \frac{du}{dy} \quad (3)$$

境界条件は式(4)~(6)のとおりである。

$$T(0, y) = T_0(y) \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x, L)}{\partial y} + h_1 \{T(x, L) - T_{1\infty}(x)\} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x, -L)}{\partial y} - h_2 \{T(x, -L) - T_{2\infty}(x)\} = 0 \quad (6)$$

解析結果の一般性を考慮して、式(3)~(6)を無次元表記すると、式(7)~(10)が導かれる。

$$U(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + Br \left(\frac{1+\nu}{\nu} \right)^{\nu+1} |\eta|^{\frac{\nu+1}{\nu}} \quad (7)$$

$$\theta(0, \eta) = \theta_0(\eta) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, 1)}{\partial \eta} + H_1 \{\theta(\xi, 1) - \theta_{1\infty}(\xi)\} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, -1)}{\partial \eta} - H_2 \{\theta(\xi, -1) - \theta_{2\infty}(\xi)\} = 0 \quad (10)$$

ただし、 $U(\eta) = (2\nu+1)(\nu+1)\{1-|\eta|^{1+\nu}\}$ である。式(7)は変数係数 P. D. E. であり、厳密解を得ることは非常に困難である。そこで図 2 に示すように、流路内を η 方向に n 領域に分割し、各領域で $U(\eta)$ を一定値 U_i と近似する。この場合、第 i 領域($i = 1, 2, \dots, n$)における無次元エネルギー式が式(11)のように得られる。

$$U_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \eta^2} + Q(\eta) \quad (11)$$

ただし、 $Q(\eta) = Br \{(1+\nu)|\eta|^{1+\nu}\}$ とおいた。仮想界面における連続条件式と境界条件式は式(12)~(16)で表される。

$$\theta_i(\xi, \eta_i) = \theta_{i+1}(\xi, \eta_i) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta_i(\xi, \eta_i)}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta_{i+1}(\xi, \eta_i)}{\partial \eta} \quad (13)$$

$$\theta_i(0, \eta) = \theta_0(\eta) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_i(\xi, 1)}{\partial \eta} + H_1 \{\theta_i(\xi, 1) - \theta_{1\infty}(\xi)\} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta_i(\xi, -1)}{\partial \eta} - H_2 \{\theta_i(\xi, -1) - \theta_{2\infty}(\xi)\} = 0 \quad (16)$$

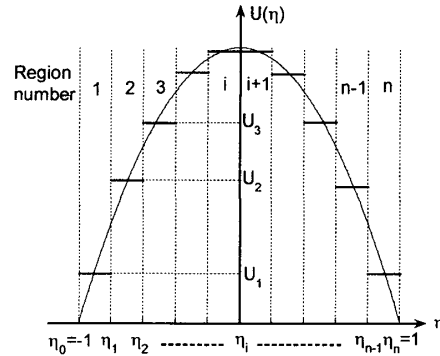


Fig. 2 Virtual division inside the conduit

2.2 Vodicka の手法^{(14),(16)}による近似解析解の導出

式(11)~(16)の解を次のように分離する。

$$\theta_i(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\xi) X_{im}(\eta) + \sum_{j=1}^2 W_j(\eta) P_j(\xi) \quad (17)$$

ただし、

$$P_1(\xi) = -\theta_{2\infty}(\xi), P_2(\xi) = \theta_{1\infty}(\xi) \quad (18)$$

$W_j(\eta)$ は式(19)で表される境界値問題の解である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 W_j}{d\eta^2} &= 0, j=1, 2 \\ \frac{dW_1(-1)}{d\eta} - H_2 W_1(-1) &= H_2 \\ \frac{dW_2(-1)}{d\eta} - H_2 W_2(-1) &= 0 \\ \frac{dW_1(1)}{d\eta} + H_1 W_1(1) &= 0 \\ \frac{dW_2(1)}{d\eta} + H_1 W_2(1) &= H_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$X_{im}(\eta)$ は式(20)で表される固有値問題の解である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X_{im}}{d\eta^2} + \gamma_m^2 U_i X_{im} &= 0, i=1, 2, \dots, n \\ X_{im}(\eta_i) &= X_{(i+1)m}(\eta_i), i=1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{dX_{im}(\eta_i)}{d\eta} &= \frac{dX_{(i+1)m}(\eta_i)}{d\eta}, i=1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{dX_{1m}(-1)}{d\eta} - H_2 X_{1m}(-1) &= 0 \\ \frac{dX_{nm}(1)}{d\eta} + H_1 X_{nm}(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(19), (20)の解である $W_j(\eta); j=1, 2$ と $X_m(\eta); i=1, 2, \dots, n$, $m=1, 2, \dots$ は, それぞれ式(21), (22)で与えられる.

$$W_1(\eta) = \frac{H_1 H_2 \eta - (1 + H_1) H_2}{H_1 + H_2 + 2H_1 H_2}, \quad (21)$$

$$W_2(\eta) = \frac{H_1 H_2 \eta + (1 + H_2) H_1}{H_1 + H_2 + 2H_1 H_2}$$

$$X_{im}(\eta) = A_{im} \cos(\sqrt{U_i} \gamma_m \eta) + B_{im} \sin(\sqrt{U_i} \gamma_m \eta) \quad (22)$$

未知係数 A_{im} , B_{im} を決定するための条件式は, X_m に対する固有値問題(20)の連続条件式および境界条件式に式(22)を代入すれば得られる. また, 固有値 γ_m は A_{im} , B_{im} が 0 以外の解を持つための条件から決定され, 式(23)の超越方程式の正根として求められる.

$$\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_{n-1} \cdot \mathbf{a}_n = 0 \quad (23)$$

ここで,

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} d_{1m} \sin(d_{1m}) - H_2 \cos(d_{1m}) \\ d_{1m} \cos(d_{1m}) + H_2 \sin(d_{1m}) \end{bmatrix}^T,$$

$$d_{im} = \sqrt{U_i} \gamma_m, \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{D}_{i+1},$$

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{d_{im}} \begin{bmatrix} d_{im} \cos(d_{im} \eta_i) & -\sin(d_{im} \eta_i) \\ d_{im} \sin(d_{im} \eta_i) & \cos(d_{im} \eta_i) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{i+1} = \begin{bmatrix} \cos\{d_{(i+1)m} \eta_i\} & \sin\{d_{(i+1)m} \eta_i\} \\ -d_{(i+1)m} \sin\{d_{(i+1)m} \eta_i\} & d_{(i+1)m} \cos\{d_{(i+1)m} \eta_i\} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} d_{nm} \cos(d_{nm}) + H_1 \sin(d_{nm}) \\ d_{nm} \sin(d_{nm}) - H_1 \cos(d_{nm}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

式(24)中の T は転置行列記号である. 式(14)に式(17)を代入して, 次の条件式を得る.

$$G(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(0) X_{im}(\eta) = \theta_0(\eta) - \sum_{j=1}^2 W_j(\eta) P_j(0) \quad (25)$$

さて, 式(20), (22)で与えられる固有関数 $X_m(\eta)$ は, 不連続な重み関数に対して式(26)の直交関係を有する.

$$\sum_{i=1}^n U_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} X_{im}(\eta) X_{ik}(\eta) d\eta = \begin{cases} \text{const.} & (m=k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases} \quad (26)$$

この場合, $W_j(\eta)$, $Q(\eta)$, $G(\eta)$ は $X_m(\eta)$ によって式(27)~(29)のように級数展開できる.

$$W_j(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{mj} X_{im}(\eta) \quad (27)$$

$$Q(\eta) = U_i \sum_{m=1}^{\infty} q_m X_{im}(\eta) \quad (28)$$

$$G(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m X_{im}(\eta) \quad (29)$$

ただし,

$$w_{mj} = M_m^{-1} \sum_{i=1}^n U_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} W_j(\eta) X_{im}(\eta) d\eta,$$

$$q_m = M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} Q(\eta) X_{im}(\eta) d\eta,$$

$$g_m = M_m^{-1} \sum_{i=1}^n U_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} G(\eta) X_{im}(\eta) d\eta,$$

$$M_m = \sum_{i=1}^n U_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \{X_{im}(\eta)\}^2 d\eta \quad (30)$$

式(17), (27), (28)を式(11)に代入し, 式(19), (20)を考慮すれば, 式(31)で表される $\phi_m(\xi)$ に関する1階線形常微分方程式が得られる.

$$\frac{d\phi_m}{d\xi} + \gamma_m^2 \phi_m = q_m - \sum_{j=1}^2 w_{mj} \frac{dP_j}{d\xi} \quad (31)$$

式(25), (29)より得られる $\phi_m(0) = g_m$ を用いて式(31)を解けば, $\phi_m(\xi)$ は式(32)で表現される.

$$\begin{aligned} \phi_m(\xi) = & g_m \exp(-\gamma_m^2 \xi) + \frac{q_m}{\gamma_m^2} \{1 - \exp(-\gamma_m^2 \xi)\} \\ & - \exp(-\gamma_m^2 \xi) \int_0^\xi \exp(\gamma_m^2 t) \sum_{j=1}^2 w_{mj} \frac{dP_j(t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (32)$$

最終的に, 流路内第 i 領域における温度関数 $\theta_i(\xi, \eta)$ は, 式(33)のように得られる.

$$\begin{aligned} \theta_i(\xi, \eta) = & \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\xi) \{A_{im} \cos(\sqrt{U_i} \gamma_m \eta) + B_{im} \sin(\sqrt{U_i} \gamma_m \eta)\} \\ & + \frac{\{(1 + H_1) H_2 - H_1 H_2 \eta\} \theta_{2\infty}(\xi) + \{(1 + H_2) H_1 + H_1 H_2 \eta\} \theta_{1\infty}(\xi)}{H_1 + H_2 + 2H_1 H_2} \end{aligned} \quad (33)$$

流体の無次元混合平均温度は式(34)で与えられる.

$$\theta_B(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta \quad (34)$$

また, $\eta=1, -1$ における局所ヌセルト数は, それぞれ式(35), (36)で表される.

$$\begin{aligned} Nu_1(\xi) = & \frac{\hat{h}_1 L}{\lambda} = \frac{\frac{\partial \theta_n(\xi, 1)}{\partial \eta}}{\theta_n(\xi, 1) - \theta_B(\xi)} = \frac{-1}{\theta_n(\xi, 1) - \theta_B(\xi)} \\ & \times \left[\sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\xi) \sqrt{U_n} \gamma_m \{A_{nm} \sin(\sqrt{U_n} \gamma_m) - B_{nm} \cos(\sqrt{U_n} \gamma_m)\} \right. \\ & \left. - \frac{H_1 H_2 \{\theta_{1\infty}(\xi) - \theta_{2\infty}(\xi)\}}{H_1 + H_2 + 2H_1 H_2} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} Nu_2(\xi) = & \frac{\hat{h}_2 L}{\lambda} = \frac{-\frac{\partial \theta_1(\xi, -1)}{\partial \eta}}{\theta_1(\xi, -1) - \theta_B(\xi)} = \frac{-1}{\theta_1(\xi, -1) - \theta_B(\xi)} \\ & \times \left[\sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\xi) \sqrt{U_1} \gamma_m \{A_{1m} \sin(\sqrt{U_1} \gamma_m) + B_{1m} \cos(\sqrt{U_1} \gamma_m)\} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{H_1 H_2 \{\theta_{1\infty}(\xi) - \theta_{2\infty}(\xi)\}}{H_1 + H_2 + 2H_1 H_2} \right] \quad (36)$$

3. 数値計算

本研究では数値計算の一例として、 $\theta_0(\eta) = 1$, $\theta_{1\infty}(\xi) = \theta_{2\infty}(\xi) = 0$ かつ $H_1 = H_2 = H$ の場合を考察する。この場合、流路内の温度場は x 軸 (ξ 軸) に対して対称となるため、式(35)、(36)の局所ヌセルト数も互いに等しくなる。数値計算諸元として次の値を採用する。

$$Br = 0, 0.5, 1.5, \nu = 0.3, 1, 3, H = 0.1, 0.5, 1.5, 10, 50, \infty \quad (37)$$

ブリンクマン数はその定義式より、 $Br > 0$ の範囲では、流路内を流れる流体が周囲より冷却される場合に、また $Br < 0$ の範囲では、流体が周囲から加熱を受ける場合に、粘性発熱の大きさを表すパラメータである。なお、 $Br = 0$ は粘性散逸がない場合である。

本計算における式(33)、(35)、(36)の無限級数中の項数は、局所ヌセルト数の有効桁数を7以上とするため、 $\xi < 10^{-3}$ の範囲では500を、 $\xi \geq 10^{-3}$ の範囲では200を採用している。一例として、 $\nu = 1, Br = 0, H = \infty, n = 20$ とした場合の局所ヌセルト数の収束挙動を表1に示す。上記のように項数をとれば、7以上の有効桁数が得られていることがわかる。

Table 1 Relationship between the convergence of Nusselt number and the number of terms, N , for $\nu = 1, Br = 0, H = \infty$ and $n = 20$

ξ	$N=50$	$N=100$	$N=200$	$N=500$	$N=600$
10^{-4}	16.30266	16.66449	16.66510	16.66513	16.66513
10^{-3}	7.749172	7.749371	7.749372	7.749372	7.749372
10^{-2}	3.692561	3.692599	3.692599	3.692599	3.692599
10^{-1}	2.047663	2.047670	2.047670	2.047670	2.047670
10^0	1.885143	1.885146	1.885146	1.885146	1.885146

4. 結果および考察

4.1 領域分割数の検討 流速の η 方向への連続的な変化を、等分割した各領域で相異なる一定値を有するものと近似して得られる本近似解析解の精度および有用性を評価するため、一定温度に保持された平行平板間に粘性発熱をもたないニュートン流体が流入している最も基本的な Graetz 問題、すなわち $Br = 0, H = \infty, \nu = 1$ の場合を考える。この問題は既に Rosales ら⁽¹⁷⁾ と Cotta ら⁽⁸⁾ によって半数値的に解析されている。

図3は、本解析手法による流体の温度分布と上記文献からの温度分布を比較したものである。 ξ の値が小さいほど、領域分割数 n が温度分布に及ぼす影響は大きく、 $\xi = 10^{-4}$ の位置で $n = 5$ とした場合、温度分布に

大きな振動がみられる。一方 $n = 20$ にとると、 ξ の全範囲において、本近似解析解による温度分布は文献値に良く一致している。また、表2に本解析手法からの局所ヌセルト数と上記文献値を比較する。 $n = 20$ とした場合、 $10^{-4} < \xi < 10^0$ の範囲において両者の差は0.1%以下である。したがって、この範囲内で局所ヌセルト数を検討する場合、 n は20で十分である。以上より、本近似解析解の妥当性が検証された。なお、これ以降の計算結果は全て $n = 20$ の場合のものである。

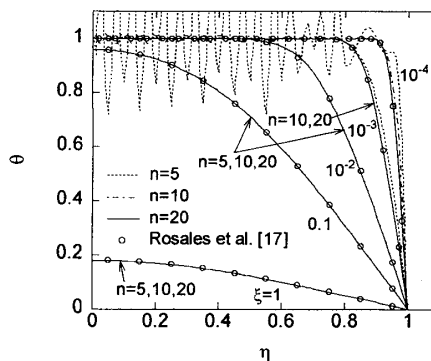


Fig.3 Relationship between the number of partitions n and convergence of dimensionless temperature θ

Table 2 Comparison of local Nusselt numbers

ξ	$Nu(\xi)^*$	$Nu(\xi)^+$	ξ	$Nu(\xi)^{**}$	$Nu(\xi)^+$
10^{-4}	16.6687	16.6651	8×10^{-4}	8.34475	8.34277
10^{-3}	7.7513	7.7494	1.6×10^{-3}	6.6400	6.6379
10^{-2}	3.6934	3.6926	8×10^{-3}	3.9575	3.9565
10^{-1}	2.04782	2.04767	8×10^{-2}	2.12915	2.12896
10^0	1.88517	1.88515	8×10^{-1}	1.88517	1.88514

* Rosales et al.⁽¹⁷⁾ ** Cotta et al.⁽⁸⁾ + Present work ($n = 20$)

4.2 各種パラメータの局所ヌセルト数分布への影響

流路入口付近の局所ヌセルト数分布に及ぼす粘性散逸、平板外表面の熱伝達率および流体レオロジー特性の影響について図4に示す。また、 $\nu = 0.3, H = 1$ とした場合の無次元混合平均温度と無次元平板壁面温度の流れ方向変化を図5に、流路内の無次元流速分布と無次元粘性発熱分布を図6に示す。図4より、(a)、(b)、(c)のいずれの場合も $\xi = 10^{-4}$ でヌセルト数が最も大きい。 $Br = 0$ の場合、 ξ の増加とともにヌセルト数は単調に減少し、最終的には発達した温度場でのヌセルト数に収束している。一方 $Br \neq 0$ の場合、ヌセルト数は必ずしも単調に減少せず、特に Br 値が小さい場合には、減少から増加に転じている。これは、以下の理由からである：図6に示されているように、粘性発熱は平板壁近傍で大きく、流路中央部で小さい分布をとる。また、

ヌセルト数は式(35), (36)から明らかなように, 「平板壁面上での温度勾配」と「平板壁面上の温度と混合平均温度との差 $\Delta\theta$ 」の比で定義される. したがって, $Br \neq 0$ ならば下流に行く (ξ が増加する) につれて, 平板壁近傍での粘性発熱が平板壁面上での温度勾配の低下を抑制し, かつ図 5 中の $Br = 0.5$ のように, ある位置から $\Delta\theta$ が減少するため, 結果としてヌセルト数は増加に転じる^(18,19).

さらに図 4 より, $Br \neq 0$ の場合は Br 値の大小に関わらず, ヌセルト数が $\xi \rightarrow \infty$ である値に収束していることもわかる.

H の影響について考察すると, $\xi = 10^4$ でのヌセルト数は H が小さくなるにつれて増大しているが, $Br \neq 0$ の場合の収束値は H に依存していない. これは, 粘性散逸がある場合の局所ヌセルト数に及ぼす円管外表面の熱伝達率とプリンクマン数の影響について検討した Lin ら⁽²⁰⁾の結論と一致している. なお, この収束値は流体がベキ乗則流体の場合, 式(38)で与えられる⁽⁷⁾.

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} Nu(\xi) = \frac{(4\nu + 1)(5\nu + 2)}{2\nu(3\nu + 1)} \quad (38)$$

図 4 に式(38)から得られたヌセルト数の収束値を○で示している. 図 4(a), (b), (c) のいずれの場合も, 本計算結果と精度良く一致していることがわかる. また, H が小さく Br が大なる場合に, $\xi \approx 0.1$ でヌセルト数が極大値をとっているが, これは以下の理由からである

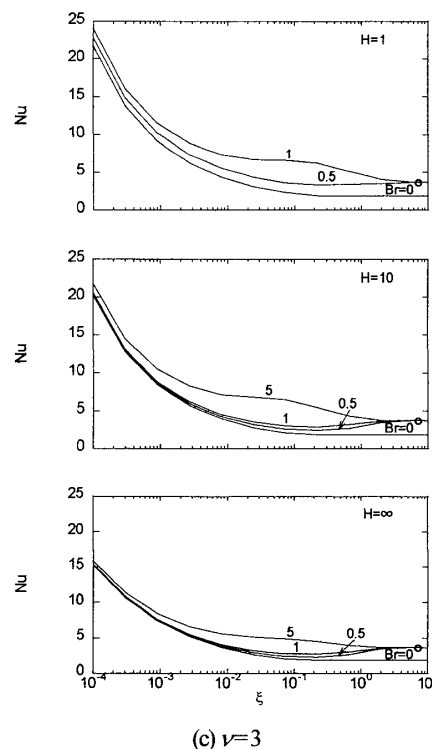
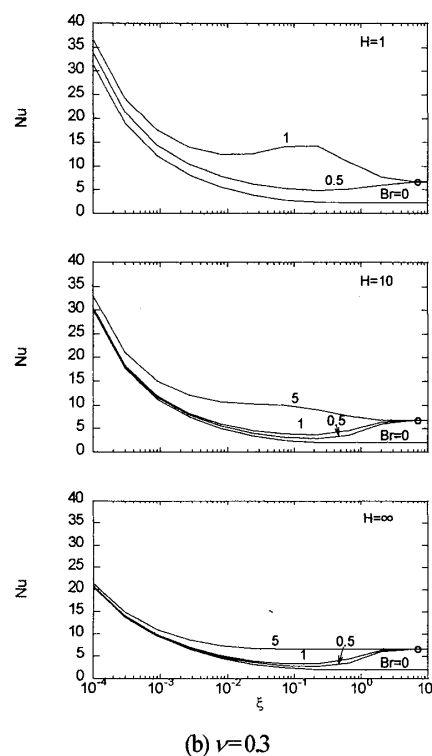
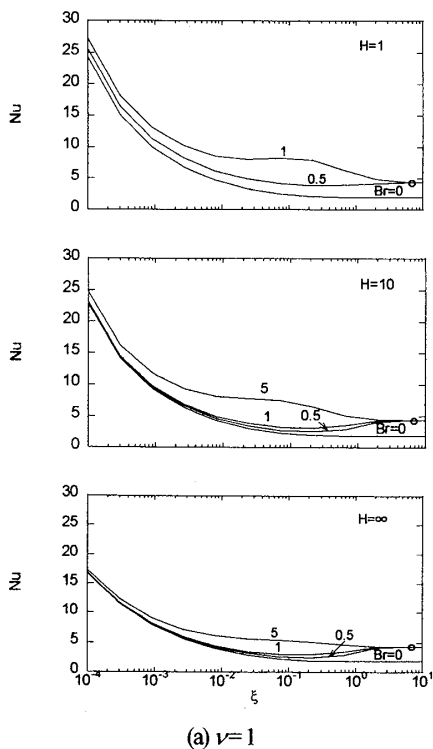


Fig. 4 Local Nusselt number near the channel entrance

: 図 7 にヌセルト数が極大値をもつ場合の流路断面内での無次元温度分布を示すが, この図より, 流路入口の極近傍では, 粘性による発熱に比べて流体から周囲媒体への熱放散の方が支配的であるため, 温度境界層

の発達とともにヌセルト数は単調に減少する。しかし、 ξ の増加につれて発熱量が大きくなると、平板壁近傍での大きな粘性発熱により平板壁面上での温度勾配が増大するため、ヌセルト数が増加に転じる。さらに ξ が増加すると、流れと直角方向（図7では $-\eta$ 方向）の熱伝導により、流路中央部の温度上昇が大きくなる。式(34)より、混合平均温度は流速の小さな壁面近傍の温度よりも流速の大きな流路中央部の温度に強く依存するため、流路中央部の温度上昇は混合平均温度の大きな上昇を招き、平板壁面上の温度と混合平均温度との差も増加する（図5の $Br = 1$ を参照）。よって、ヌセルト数は極大値を持ち、それより下流側では再び減少する。

局所ヌセルト数に及ぼす ν の影響についてみると、 ν が小さいほどヌセルト数が全体的に上昇する傾向がある。この理由を説明するため、2種類の ν 値に対して、 $H = 10$ を有する平行平板間の流路断面内での無次元温度分布を図8に示す。図6に示されているように、粘性発熱は式(1), (3)より、速度勾配が急な場所ほど大きいため、 $\nu = 3$ の場合は $\nu = 0.3$ の場合よりも平板間中央部($\eta = 0$)で温度が高くなっており、一方 $\nu = 0.3$ の温度

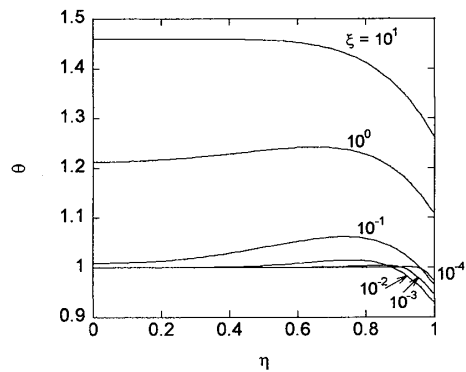
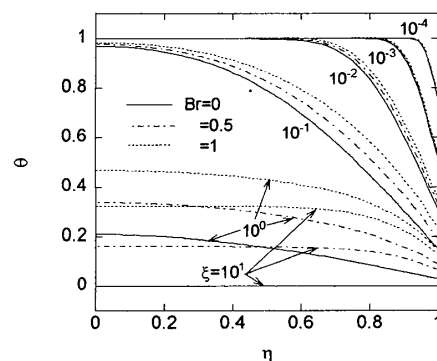
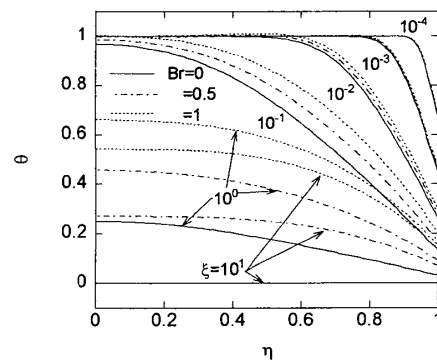


Fig. 7 Temperature profile at different distance from the entrance of the channel for $\nu=0.3, Br=1$ and $H=1$



(a) $\nu=0.3$



(b) $\nu=3$

Fig. 8 Temperature profile at different distance from the entrance of the channel with $H=10$

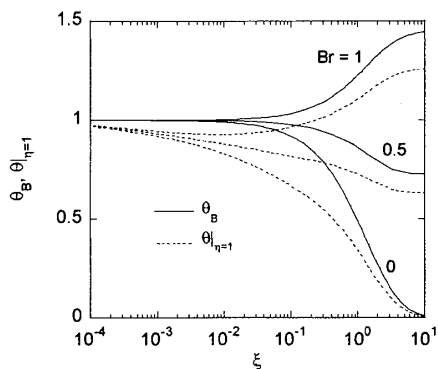


Fig. 5 Bulk and wall temperature distributions for $\nu=0.3$ and $H=1$

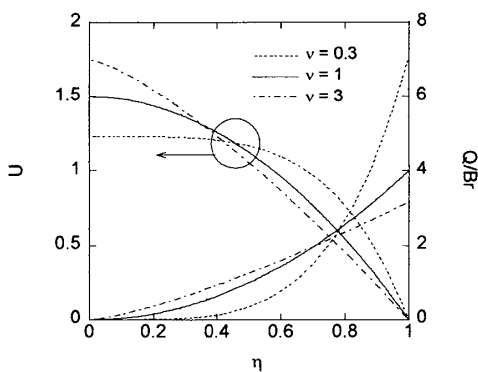


Fig. 6 Distributions of fluid velocity and viscous dissipation for different values of ν

分布はより扁平な形状を呈している。したがって、 ν が小さいほど平板壁面上の温度と混合平均温度との差が小さくなるため、ヌセルト数が大きくなる。

4.3 限界流速線図 本近似解析解の工業分野での応用例として、平板の周囲媒体温度が平板間を流れる流体の凝固温度以下である場合に、冷却区間内での凝固を回避するのに必要な限界流速を求める。

図9は、無次元凝固温度 θ_f と無次元凝固開始位置 ξ_f との関係を、 H と Br をパラメータとして示したものである。この図は $\eta=1$ における ξ 方向の温度分布を基に作成できる。図より、例えば $\nu=0.3, Br=0$ で $H=5, \theta_f=0.5$ という熱負荷条件の場合、対応する ξ_f の値は約0.01であり、流体の物性値 λ, ρ, c と流路長 x および流路半幅 L が既知ならば、 ξ_f の定義式 $\xi_f = x\lambda(L^2 u_m \rho c) \div 0.01$ より、流路断面内での平均限界流速がわかる。流速をこの値以上にしなければ、その流路内では凝固が生じることになる。

以下に、限界流速に及ぼす各種パラメータの影響について考察する。 $Br=0$ の場合、全体的な傾向として $\xi_f \rightarrow 0$ で $\theta_f \rightarrow 1$ へ、 $\xi_f \rightarrow \infty$ で $\theta_f \rightarrow 0$ へ漸近しているが、漸近の程度が H の大きさに依存していることがわかる。これは粘性散逸を無視した管内流の限界流速について整理したSadeghipourら⁽²⁾と同様の結果である。一方 $Br \neq 0$ の場合、 H が小さくなるにつれて、また ξ_f が大きくなるにつれて、 Br の影響が顕著になっている。限界流速に及ぼす ν の影響は H, Br のそれと比較して非常に小さい。

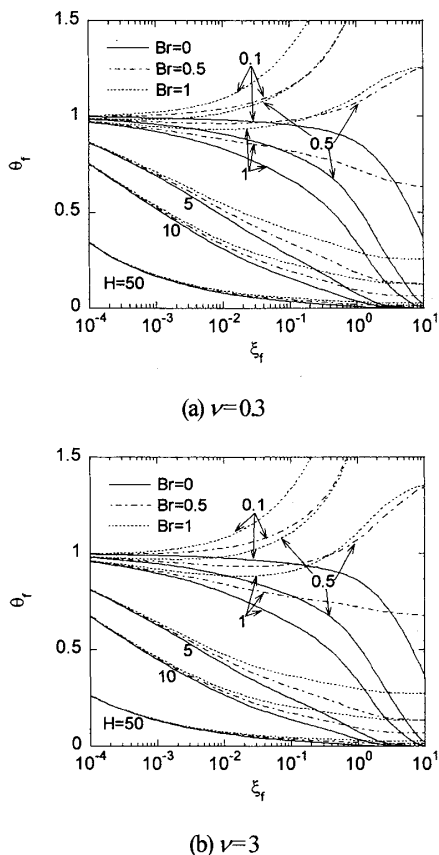


Fig. 9 Variation of freeze-free zone with dimensionless solidification temperature for different values of H

5. 結 論

周囲から熱負荷を受ける平行平板間を流れる非ニュートン流体の強制対流熱伝達問題を粘性散逸の影響を考慮して解析した。流速分布が流路断面内で区分的に一定という近似のもとで、本問題を一種の積分変換法に相当するVodickaの手法により数学的に解き、流体温度と局所ヌセルト数の近似解析解を導出した。ニュートン流体とベキ乗則に従う非ニュートン流体について数値計算を行い、その計算結果より、ブリンクマン数、平板外表面熱伝達率および流体レオロジー特性が流体の温度分布と局所ヌセルト数分布に及ぼす影響を考察した。また、平板の周囲媒体温度が平板間を流れる流体の凝固温度以下である場合に、冷却区間内での凝固を回避するのに必要な限界流速を図示した。

得られた結論を以下にまとめる。

- (1) 粘性散逸を考慮した平行平板間のGraetz問題について、工学的に十分な精度の局所ヌセルト数値を得るために必要な流路内の領域分割数は20である。
- (2) 温度助走区間内のヌセルト数は、平板外表面熱伝達率が小さいほど、またベキ乗則モデルインデックスが小さいほど、高くなる傾向を示す。
- (3) 凝固回避のための限界流速に及ぼす、ベキ乗則モデルインデックスすなわち流体の速度分布の影響は、熱負荷強度やブリンクマン数のそれと比較して非常に小さい。

本解析手法は平行平板間流れのみならず、管内流にも適用できる。また前述したように、流路内で任意の速度分布形をとることが可能であるので、移動壁⁽¹⁰⁾の系にも応用できる。さらに、周囲媒体温度が流れ方向に任意に変化できるので、流体が区分的に異なる熱的負荷を受ける場合⁽⁶⁾なども本手法により容易に解析できる。今後は本手法を熱交換器の系に適用し、二流体および三流体熱交換器の特性評価をおこなう予定である。

文 献

- (1) Mansour, A.R., Two-dimensional heat or mass transfer in laminar flow between parallel plates, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, Vol.111, No.2 (1989), pp. 566-568.
- (2) Faghri, M. and Sparrow, E.M., Simultaneous wall and fluid axial conduction in laminar pipe-flow heat transfer, *Transactions of the*

- American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, Vol.102, No.1 (1980), pp. 58-63.
- (3) Barozzi, G.S. and Pagliarini, G., A method to solve conjugate heat transfer problems: The case of fully developed laminar flow in a pipe, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, Vol.107, No.1 (1985), pp. 77-83.
 - (4) Koyama, S. et al., Laminar Forced Convective Heat Transfer inside a Locally Heated Tube, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol.54, No.501 (1988), pp. 1116-1122.
 - (5) Nguyen, T.V., Laminar heat transfer for thermally developing flow in ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.35, No.7 (1992), pp. 1733-1741.
 - (6) Weigand, B. and Lauffer, D., The extended Graetz problem with piecewise constant wall temperature for pipe and channel flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.47, No.24 (2004), pp. 5303-5312.
 - (7) Dang, V.D., Heat transfer of power law fluid at low Peclet number flow, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, Vol.105, No.3 (1983), pp. 542-549.
 - (8) Cotta, R.M. and Ozisik, M.N., Laminar forced convection of power-law non-Newtonian fluids inside ducts, *Waerme-Stoffubertrag*, Vol.20, No.3 (1986), pp. 211-218.
 - (9) Quaresma J.N.N. and Macedo E.N., Integral transform solution for the forced convection of Herschel-Bulkley fluids in circular tubes and parallel-plates ducts, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Vol.15, No.1 (1998), pp. 77-89.
 - (10) Shigechi, T. et al., Laminar Heat Transfer With Viscous Dissipation and Fluid Axial Heat Conduction for Modified Power Law Fluids Flowing in Parallel Plates With One Plate Moving, *JSME International Journal, Series B*, Vol.46, No.4 (2003), pp. 539-548.
 - (11) Coelho, P.M. et al., Thermal entry flow for a viscoelastic fluid: the Graetz problem for the PTT model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.46, No.20 (2003), pp. 3865-3880.
 - (12) Oliveira, P.J. et al., The Graetz problem with viscous dissipation for FENE-P fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol.121, No.1 (2004), pp. 69-72.
 - (13) Valko, P.P., Solution of the Graetz-Brinkman problem with the Laplace transform Galerkin method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.48, No.9 (2005), pp. 1874-1882.
 - (14) Vodicka, V., Linear heat conduction in laminated bodies (in German), *Mathematische Nachrichten*, Vol.14, No.1 (1955), pp. 47-55.
 - (15) Mikhailov, M.D. and Ozisik, M.N., Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion, (1994), p. 344, Dover Publications.
 - (16) Sugano, Y. et al., An Analytical Solution for Transient Thermal Stress in a Functionally Gradient Plate with Arbitrary Nonhomogeneities and Thermal Boundary Conditions : Material Properties Determined by Fuzzy Inference, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.59, No.567 (1993), pp. 2666-2673.
 - (17) Rosales, M.A. and Frederick, R.L., Semi analytic solution to the Cartesian Graetz problem: results for the entrance region, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol.31, No.5 (2004), pp. 733-740.
 - (18) Shah, R.K. and London, A.L., *Advances in Heat Transfer* (Suppl. 1), (1978), p. 110-111, Academic Press.
 - (19) Min, T. et al., Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe –I. Analytical approach– thermally fully developed flow and thermally developing flow (the Graetz problem extended), *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.40, No. 13 (1997), pp. 3025-3037.
 - (20) Lin, T.F. et al., Analysis of viscous dissipation effect on thermal entrance heat transfer in laminar pipe flows with convective boundary conditions, *Waerme-Stoffubertrag*, Vol.17, No.2 (1983), pp. 97-105.
 - (21) Sadeghipour, M.S. et al., Transient freezing of a liquid in a convectively cooled tube, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer*, Vol.104, No.2 (1982), pp. 316-322.