

任意の不均質性と加熱を有する傾斜機能平板の非定常熱応力の解析解* (ファジィ推論による物性値を用いた場合)

菅野良弘*¹, 森下博之*², 田中喜久昭*³

An Analytical Solution for Transient Thermal Stress in a Functionally Gradient Plate with Arbitrary Nonhomogeneities and Thermal Boundary Conditions (Material Properties Determined by Fuzzy Inference)

Yoshihiro SUGANO, Hiroyuki MORISHITA and Kikuaki TANAKA

Functionally gradient material (FGM) is one of the typical nonhomogeneous materials. In this paper, an analytical solution based on a kind of integral transform developed by Vodicka for the composite regions is presented for the transient heat conduction problem in a nonhomogeneous plate with arbitrary nonhomogeneous thermophysical properties. The material properties of SiC/Al FGM with the uncertainty of distinction between the matrix phase and the filler phase in an intermediate composite and the uncertain change in the microstructure of the filler phase are estimated based on Mamdani's method of fuzzy inference. The associated transient thermal stresses under the various thermal boundary conditions are analysed with the use of the closed-form solution derived by one of the authors for a nonhomogeneous plate with arbitrary variations in mechanical properties through the thickness, and the composition suitable for the reduction of thermal stress is discussed.

Key Words: Elasticity, Nonhomogeneous, Functionally Gradient Material, Thermal Stress, Stress Relaxation, Plate, Fuzzy Inference, Thermally Arbitrary Boundary Condition, Analytical Solution

1. 緒 言

スペースプレーンのノーズコーンやエンジン部材等の超高温環境下における使用を目的とした、熱応力緩和型傾斜機能材料の研究・開発が進められている⁽¹⁾。傾斜機能材料は使用目的に応じた材料設計(テーラリング)が必要なため、使用熱的条件下での力学的評価が非常に重要となってくる。しかし、傾斜機能材料はその特徴である不均質性のために、解析的な取扱いが非常に困難である。板厚方向に任意の不均質性をもつ平板に対する熱応力式⁽²⁾は著者らの一人によりすでに報告されている。しかし、その前段階に必要な温度分布を解析的に求めるためには、不均質性のある関数形に近似する必要がある。すなわち、不均質熱伝導論の立場での非定常温度解析には、その不均質性がある特定の関数形である場合にのみ解析解⁽²⁾⁽³⁾が得られ、任意の不均質性に対する厳密な解析解を得ることは将来的にも絶望的であると思われる。これまでに、任意の不均質性に対して有効な解を得るため、物性値が連

続的に変化する傾斜機能材料を、思想上各層が均質な多層体に分割する近似的解析法が研究されている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかし、いずれの場合も多層体の非定常温度場はCarslawらの解析にならぬ、ラプラス変換法により解析されている。この方法では周囲媒体温度が時間的に変化する場合など、逆ラプラス変換が非常に困難になり、解析できないことが多い。Vodicka⁽⁶⁾は、修正された変数分離法と固有関数の新しい直交関係を提案し、一次元複合領域の温度を解析した。著者らの一人はこの方法を応用し複合円筒の熱応力問題⁽⁷⁾を解析した。そこで本研究では、傾斜機能平板を仮想的に分割した多層無限平板の非定常温度分布をVodickaの方法を応用した一種の積分変換法により解析した。また、温度解析、熱応力解析に必要な物性値を求めるに際して、中間組成における母相と分散相の区別に対するあいまいさ⁽⁸⁾を考慮するために、平野ら⁽¹¹⁾と同様にしてファジィ推論法⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を応用した物性値の推定を行った。さらに、3種類の異なる組成分布をもつAl/SiC傾斜機能平板について数値計算を行い、熱応力緩和に適した異種材料からなる不均質材料の組成分布が、熱的境界条件にいかに関与されるかを検討した。

* 原稿受付 平成5年3月15日。

¹ 正員, 岩手大学工学部(〒020 盛岡市上田4-3-5)。² 学生員, 大阪府立大学大学院(〒593 堺市学園町)。³ 正員, 東京都立科学技術大学(〒191 日野市旭が丘)。

2. ファジィ推論を用いた物性値推定

傾斜機能材料内部の温度分布や熱応力分布を求めるためには、基本構成材料の物性値から中間組成におけるマクロ物性を推定する必要がある。古くから Kerner らによって研究されてきた、多相材料の各種物性値に関する複合則や、Eshelby らによる微視力学的アプローチを用いてマクロ物性値を計算する場合、マイクロ組織の形態によっては母相と分散相の関係を入れ換えると得られる結果が相違する。傾斜機能材料はその組成が高温側セラミックス 100%から低温側金属 100%まで組成が連続的に変化するため、中間組成領域においては必ずしも母相と分散相とが区別・限定できない⁽⁹⁾。そのため、傾斜機能材料内部の物性値を求める場合に、既存の複合則をそのまま利用することができない。またマイクロ組織の形態についても、一般的には組成分布とともに変化するものと考えられる。このような中間組成領域における母相と分散相の反転や、マイクロ組織の変化に関するあいまいさに対応するために、ファジィメンバシップ関数を用い、Zadehの提案したファジィ命題とファジィ関係との合成則に基づく方法(直接法)における、ファジィ制御によく用いられる Mamdani の方法⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾によって、平野ら⁽¹¹⁾と同様にして中間組成領域におけるマクロ物性値を推定する⁽⁹⁾。ここで、ファジィメンバシップ関数の制御パラメータを次のように提案する。まず、マイクロ組織の変化について分散相の

形態は、繊維状あるいは球状(表1)をとるものとする。分散相の形態が繊維状となるメンバシップ関数を、便宜上、金属100%である $\xi=0$ においては帰属度1、金属の体積分率が80%以下では帰属度0をとり、その間線形的に減少するものとする。また、母相と分散相の反転に対するメンバシップ関数については、金属とセラミックスの体積分率が、ともに50%となるところで、母相あるいは分散相である帰属度を0.5とし、体積分率の変化の割合を考慮して決定する。以上により、次のような四つのファジィ IF-THEN ルールの前件部が考えられる。

- ①母相が金属で、マイクロ組織が繊維状
- ②母相が金属で、マイクロ組織が球状
- ③母相がセラミックスで、マイクロ組織が繊維状
- ④母相がセラミックスで、マイクロ組織が球状

①～④の前件部に対するファジィ IF-THEN ルールの後件部は、表1中のそれぞれ条件に合う既存の複合則により計算した値を採用する。物性値の推論プロセスは次のように進める。まず、メンバシップ関数より①～④の前件部に対する適合度(ファジィ集合のグレード)を求める。このときの適合演算には min 演算法を採用する。次に、各ルールに対する複合則から求めたマクロ物性値を、直接法でよく用いられる三角形ファジィ変数を用いて表し、それに適合度を入力してファジィ量としての推論結果を求め、重心法により非ファジィ化して最終的な推論結果(マクロ物性値)を求める。

SiC/Al 傾斜機能材料の SiC, Al の基本物性値を表2のようにとる。また、熱伝導率、線膨張係数、ヤング率、およびポアソン比の不均質性は次式のように表現する。

表1 ミクロ組織に対する複合則の知識選択ベース⁽¹¹⁾

Microstructure in the Hypothetical Layer	Thermal Conductivity λ	Coefficient of Thermal Expansion α	Elastic Moduli E,K,G
Laminar	Reuss Rule	Modulus based Rule	Voigt Rule
Fibrous(1)	Reuss Rule	Modulus based Rule	Voigt Rule
Fibrous(2)	Voigt Rule	Voigt Rule	Reuss Rule
Thin Layer	Voigt Rule	Voigt Rule	Reuss Rule
Flake-like	Kerner's Equation	Eshelby's Theory	Eshelby's Theory
Spherical Particle	Kerner's Equation	Kerner's or Turner's Equation	Kerner's Equation

表2 SiC および Al の物性値

Thermal and Mechanical Property		Al	SiC
Thermal Conductivity	λ (W/mK)	233	65
Coefficient of Thermal Expansion	α ($\times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	23.4	4.3
Young's Modulus	E (GPa)	70	427
Poisson's Ratio	ν	0.33	0.19

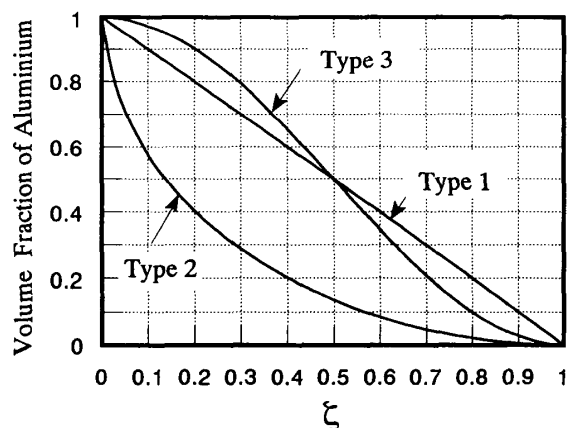


図1 解析に用いた代表的傾斜組成

$$\left. \begin{aligned} \lambda_F(z) &= \lambda_M \bar{\lambda}(\zeta), a_F(z) = a_M \bar{a}(\zeta) \\ E_F(z) &= E_M \bar{E}(\zeta), \nu_F(z) = \nu_M \bar{\nu}(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\lambda_M, a_M, E_M, \nu_M$ はAlの物性値である。上述の推論法による計算結果の一例として、図1のType3のような傾斜組成(体積分率)を有するSiC/Al傾斜機能材料に対して計算した熱伝導率、線膨張係数、ヤング率、ポアソン比を図2~5に示す。ただし、図中の記号F, S1, S2, Fuzzyはそれぞれ次のものを示す。
 F: Al-母相, SiC-繊維状分散相とした場合の物性値
 S1: SiC-母相, Al-球状分散相とした場合の物性値

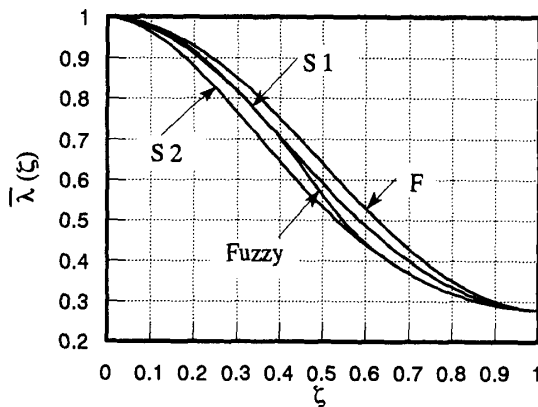


図2 傾斜組成③に対応する熱伝導率の分布

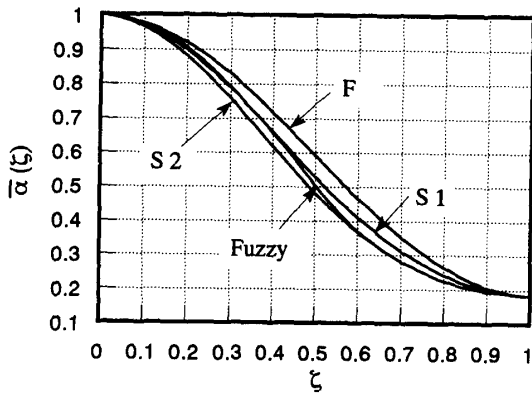


図3 傾斜組成③に対応する線膨張係数の分布

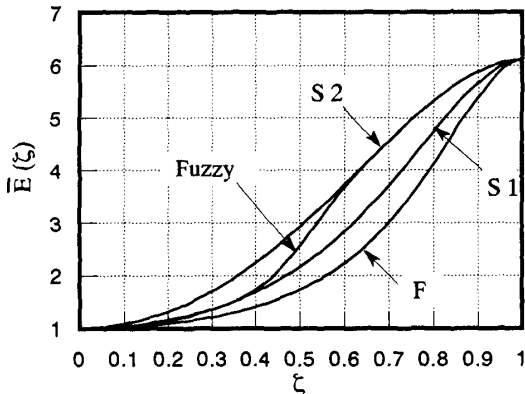


図4 傾斜組成③に対応するヤング率の分布

S2: Al-母相, SiC-球状分散相とした場合の物性値
 Fuzzy: ファジィ推論による物性値

以上の推定方法により、特に母相と分散相の区別があいまいな中間組成領域において、曲線S1から曲線S2へ連続的に遷移するような物性値が推定されている。これらの結果はファジィメンバシップ関数はあくまでも主観的に決定したものであるため、今後さまざまな材料組合せやマイクロ組織の形態に対してデータを蓄積し、メンバシップ関数を同定していく必要がある。

3. 解 析

3.1 温度解析 図6のような、時間変動する周囲媒体温度 $\phi(t), \psi(t)$ によって加熱される、各層が均質で、 n 層からなる不均質無限平板の第 i 層内の非定常温度分布 $T_i(z, t)$ を解析する。最初、平板と周囲媒体はともに同じ一定温度であったとし、この温度を基準温度 0°C と考える。このとき不均質無限平板の第 i 層内の非定常温度関数は、次の基礎微分方程式、初期条件式、境界条件式を満足する。

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \kappa_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \quad (i=1 \sim n) \dots\dots\dots (2)$$

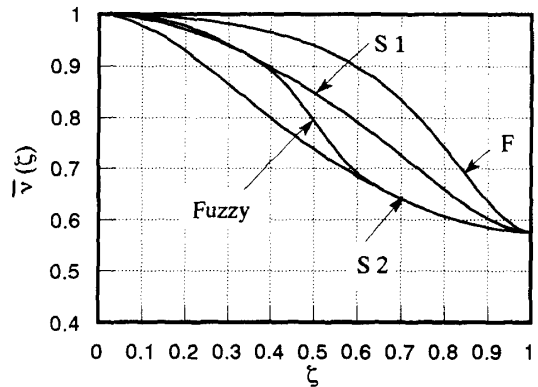


図5 傾斜組成③に対応するポアソン比の分布

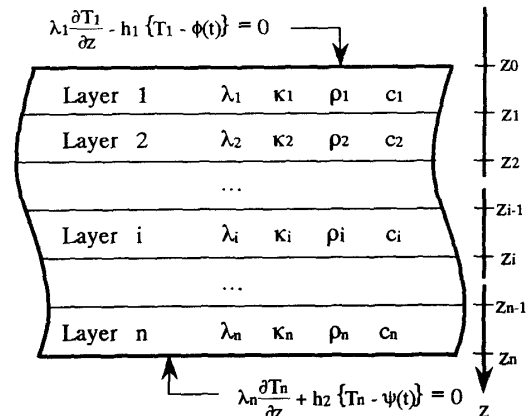


図6 不均質無限平板の座標系と加熱条件

$$(T_i)_{t=0}=0 \quad (i=1\sim n) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - h_1 \{T_1 - \phi(t)\} = 0 \quad (z=0) \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial z} + h_2 \{T_n - \phi(t)\} = 0 \quad (z=z_n) \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$T_i = T_{i+1} \quad (z=z_i, i=1\sim n-1) \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z} \quad (z=z_i, i=1\sim n-1) \quad \dots\dots\dots(7)$$

ただし、添字 i は第 i 層を示し、以後も添字はこれに従う。また、 x_i, λ_i は第 i 層の温度伝導率、熱伝導率、 h_1, h_2 はそれぞれ $z=0, z=z_n$ における熱伝達率である。式(2)~(7)の解を次のように分離する。

$$T_i(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t) R_{im}(z) + \sum_{j=1}^2 L_{ij}(z) P_j(t) \quad \dots\dots\dots(8)$$

ただし、

$$P_1(t) = -\phi(t), P_2(t) = \phi(t)$$

$L_{ij}(z)$ は次の微分方程式の解である。

$$\frac{d^2 L_{ij}}{dz^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

また、 $R_{im}(z)$ は次の固有値問題の解である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R_{im}}{dz^2} + \frac{\gamma_m^2}{x_i} R_{im} &= 0 \quad (i=1\sim n) \\ \lambda_1 \frac{dR_{1m}}{dz} - h_1 R_{1m} &= 0 \quad (z=0) \\ \lambda_n \frac{dR_{nm}}{dz} + h_2 R_{nm} &= 0 \quad (z=z_n) \\ R_{im} &= R_{i+1m} \quad (z=z_i, i=1\sim n-1) \\ \lambda_i \frac{dR_{im}}{dz} &= \lambda_{i+1} \frac{dR_{i+1m}}{dz} \quad (z=z_i, i=1\sim n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

式(9), (10)より、 $L_{ij}(z), R_{im}(z)$ は次式で与えられる。

$$L_{ij}(z) = A_{ij}^* z + B_{ij}^* \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$R_{im}(z) = A_{im} \cos(d_{im}z) + B_{im} \sin(d_{im}z) \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで、 $d_{im} = \gamma_m / \sqrt{x_i}$ である。

式(8)を式(4)~(7)に代入し、式(9)~(10)を考慮すると、 $L_{ij}(z)$ に関する次の境界条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \frac{dL_{11}}{dz} - h_1 L_{11} &= h_1, \lambda_1 \frac{dL_{12}}{dz} - h_1 L_{12} = 0 & (z=0) \\ \lambda_n \frac{dL_{n1}}{dz} + h_2 L_{n1} &= 0, \lambda_n \frac{dL_{n2}}{dz} + h_2 L_{n2} = h_2 & (z=z_n) \\ L_{i1} &= L_{i+11}, L_{i2} = L_{i+12} & (z=z_i, i=1\sim n-1) \\ \lambda_i \frac{dL_{i1}}{dz} &= \lambda_{i+1} \frac{dL_{i+11}}{dz}, \lambda_i \frac{dL_{i2}}{dz} = \lambda_{i+1} \frac{dL_{i+12}}{dz} & (z=z_i, i=1\sim n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

係数 A_{im}, B_{im} を決定するための条件式は、 R_{im} に対する固有値問題(10)の境界条件式に式(12)を代入すれば、次式のように行列表示できる。

$$C_i \cdot a_i = D_{i+1} \cdot a_{i+1}, F \cdot a_1 = 0, G \cdot a_n = 0$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \begin{bmatrix} A_{im} \\ B_{im} \end{bmatrix}, F = [-h_1 \quad \lambda_1 d_{1m}] \\ G &= [-\lambda_n d_{nm} \sin(d_{nm}z_n) + h_2 \cos(d_{nm}z_n) \quad \lambda_n d_{nm} \cos(d_{nm}z_n) + h_2 \sin(d_{nm}z_n)] \\ C_i &= \begin{bmatrix} -\varepsilon_{im/i+1m} \sin(d_{im}z_i) & \varepsilon_{im/i+1m} \cos(d_{im}z_i) \\ \cos(d_{im}z_i) & \sin(d_{im}z_i) \end{bmatrix}, D_{i+1} = \begin{bmatrix} -\sin(d_{i+1m}z_{i+1}) & \cos(d_{i+1m}z_{i+1}) \\ \cos(d_{i+1m}z_{i+1}) & \sin(d_{i+1m}z_{i+1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

また、 $\varepsilon_{im/i+1m}$ は次式で定義される。

$$\varepsilon_{im/i+1m} \equiv \frac{\lambda_i d_{im}}{\lambda_{i+1} d_{i+1m}} \quad \dots\dots\dots(15)$$

式(14), (15)より、 A_{im}, B_{im} が零以外の解をもつためには、固有値 γ_m は次の超越方程式を満足しなければならない。

$$G \cdot E_{n-1} \cdot E_{n-2} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot a_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで、行列 E_i は次式で定義される 2×2 行列である。

$$\left. \begin{aligned} E_i &\equiv D_{i+1}^{-1} \cdot C_i = \begin{bmatrix} X_{im} \cos(\alpha_{im}z_i) + Y_{im} \cos(\beta_{im}z_i) & X_{im} \sin(\alpha_{im}z_i) - Y_{im} \sin(\beta_{im}z_i) \\ X_{im} \sin(\alpha_{im}z_i) + Y_{im} \sin(\beta_{im}z_i) & -X_{im} \cos(\alpha_{im}z_i) + Y_{im} \cos(\beta_{im}z_i) \end{bmatrix} \\ X_{im} &= (1 - \varepsilon_{im/i+1m})/2, Y_{im} = (1 + \varepsilon_{im/i+1m})/2, \alpha_{im} = d_{i+1m} + d_{im}, \beta_{im} = d_{i+1m} - d_{im} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

係数 A_{im}, B_{im} は、式(14)~(17)より次式で表される。

$$a_i = E_{i-1} \cdot E_{i-2} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot a_1 \dots\dots\dots (18)$$

なお、係数 A_{ij}^*, B_{ij}^* についても同様に、式(11), (13)より次式のように求められる。

$$a_i^* = E_{i-1}^* \cdot a_1^* \dots\dots\dots (19)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a_i^* &= \begin{bmatrix} A_{ij}^* \\ B_{ij}^* \end{bmatrix}, E_i^* = \begin{bmatrix} \lambda_{1/i+1} & 0 \\ \sum_{k=1}^i (\lambda_{1/k} - \lambda_{1/k+1}) z_k & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_{1/i} &= \lambda_1 / \lambda_i, A_{i1}^* = h_1 h_2 / \Omega, A_{i2}^* = A_{i1}^*, B_{i1}^* = (\lambda_1 h_2 / \Omega) - 1, B_{i2}^* = \lambda_1 h_2 / \Omega \\ \Omega &= \lambda_1 (h_1 + h_2) + h_1 h_2 \left\{ \lambda_{1/n} + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{1/k} - \lambda_{1/k+1}) z_k \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

さて、式(10), (12)で与えられる固有関数 $R_{im}(z)$ は、不連続な重み関数に対して次式の直交関係を有する。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\lambda_i}{\chi_i} R_{im}(z) \cdot R_{ik}(z) dz \\ &= \begin{cases} \text{const.} & (m=k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases} \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

このとき、 $L_{ij}(z)$ は $R_{im}(z)$ により次式のように級数展開できる。

$$L_{ij}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} l_{mj} R_{im}(z) \dots\dots\dots (22)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} l_{mj} &= M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\chi_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} L_{ij}(z) \cdot R_{im}(z) dz \\ M_m &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\chi_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} [R_{im}(z)]^2 dz \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

式(8), (22)を基礎微分方程式(2)および初期条件式(3)に代入し、式(9), (10)を考慮すれば、 $Q_m(t)$ に関する1階線形常微分方程式および初期条件式が得られ、最終的に、多層無限平板内第 i 層内の非定常温度関数 $T_i(z, t)$ は、次式のように得られる。

$$\begin{aligned} T_i(z, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t) \{ A_{im} \cos(d_{im} z) \\ &+ B_{im} \sin(d_{im} z) \} + \sum_{j=1}^2 (A_{ij}^* z + B_{ij}^*) P_j(t) \end{aligned} \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $Q_m(t)$ は次式のように表される。

$$Q_m(t) = -e^{-\gamma_m^2 t} \int_0^t e^{\gamma_m^2 t'} \left\{ \sum_{j=1}^2 l_{mj} \frac{dP_j}{dt'} \right\} dt' \dots\dots\dots (25)$$

3.2 熱応力解析

2章でファジィ推論したヤング率、線膨張係数、ポアソン比を $E_F(z), \alpha_F(z), \nu_F(z)$ とし、著者らの一人によりすでに提案されている。次式の、板厚方向に任意の不均質特性をもつ不均質平板の熱応力式⁽²⁾を用いて解析する。

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \frac{E_F(z)}{1 - \nu_F(z)} \left[-\alpha_F(z) T(z, t) \right. \\ &+ \left. \frac{(I_2 z - I_3) I_F + (I_2 - I_1 z) I_M}{I_2^2 - I_1 I_3} \right] \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし、熱応力解析では板厚方向の座標軸 (z 軸) の原点を板厚中央にとっており、温度分布を式(26)に代入し、熱応力を計算するにあたり、 $z_0 = -h, z_n = h$ なる座標変換を行った。ここで、平板は薄く、板の両表面に外力は作用しないものとする、 I_1, I_2, I_3, I_F, I_M は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{-h}^h \frac{E_F(z)}{1 - \nu_F(z)} dz, I_2 = \int_{-h}^h \frac{z E_F(z)}{1 - \nu_F(z)} dz \\ I_3 &= \int_{-h}^h \frac{z^2 E_F(z)}{1 - \nu_F(z)} dz \\ I_F &= \int_{-h}^h \frac{E_F(z) \alpha_F(z) T(z, t)}{1 - \nu_F(z)} dz \\ I_M &= \int_{-h}^h \frac{z E_F(z) \alpha_F(z) T(z, t)}{1 - \nu_F(z)} dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

4. 数値計算

まず、次式の無次元量を導入する。

表 3 多層平板近似による計算値と厳密解⁽²⁾との比較

τ	ξ			
	0.2	0.4	0.6	0.8
0.01	0.00000 (0.00000)	0.00000 (0.00000)	0.00000 (0.00000)	0.00001 (0.00000)
0.05	0.00000 (0.00000)	0.00000 (0.00000)	0.00014 (0.00014)	0.04486 (0.04485)
0.1	0.00000 (0.00000)	0.00011 (0.00011)	0.00679 (0.00679)	0.15252 (0.15250)
0.5	0.02199 (0.02198)	0.07416 (0.07145)	0.20841 (0.20840)	0.50243 (0.50241)
1.0	0.07342 (0.07341)	0.18063 (0.18061)	0.35190 (0.35190)	0.62009 (0.62007)
∞	0.12885 (0.12885)	0.28623 (0.28623)	0.47845 (0.47845)	0.71324 (0.71324)

() · Exact Solution

$$\left. \begin{aligned} \zeta = z/z_n, \tau = x_1 t/z_n^2 \\ \beta_1 = h_1 z_n/\lambda_1, \beta_2 = h_2 z_n/\lambda_n \\ \bar{T} = T/T_0, \bar{\sigma}_f = \sigma_f(z, t)\{1 - \nu_f(z)\}/E_M \alpha_M T_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

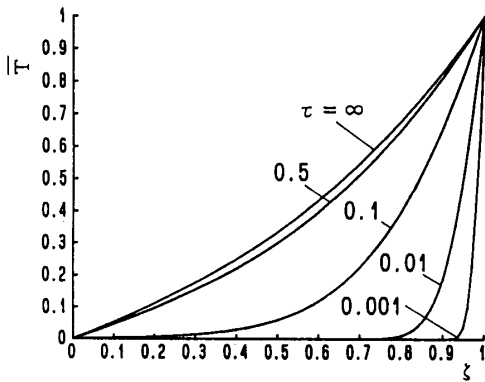
ここで、 β_j はビオ数、 T_0 は $\zeta=1$ 側周囲媒体の定常温度である。まず、傾斜機能平板を、多層平板と近似する場合の精度を評価するために、不均質熱伝導論により厳密な解析解が得られる、次式のような熱伝導率の不均質性を考える。

$$\bar{\lambda}(\zeta) = \exp(-\eta\zeta) \dots\dots\dots (29)$$

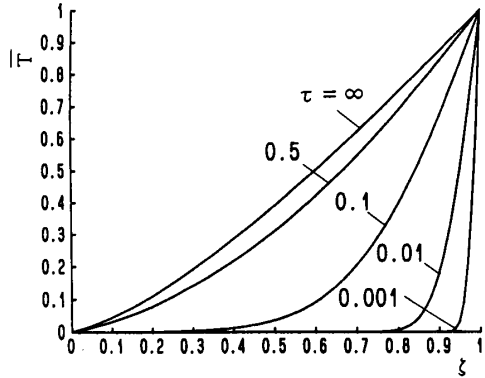
η は不均質パラメータであり、ここでは $\eta=1.0$ とした。また、初期条件および境界条件は次式で与えた。

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{T} = 0 \quad (\tau = 0) \\ (\bar{T} = 0(\zeta = 0), \bar{T} = 1(\zeta = 1)) \quad (\tau > 0) \end{aligned} \right.$$

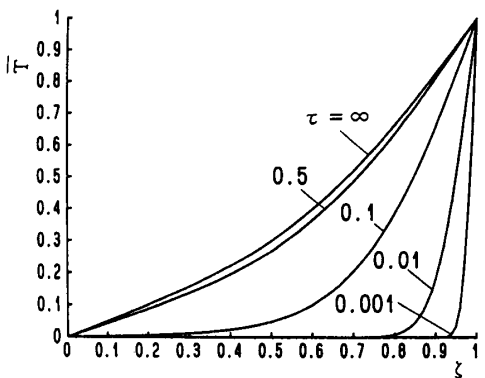
表 3 は、以上の条件下で、層数を 20 とした場合の計算値と厳密解⁽²⁾ とを比較したものである。20 層と少ない分割数に対してもほぼ完全な解が得られていることから本解析法の不均質熱伝導問題への有用性が証明された。



(a) 組成分布①の場合

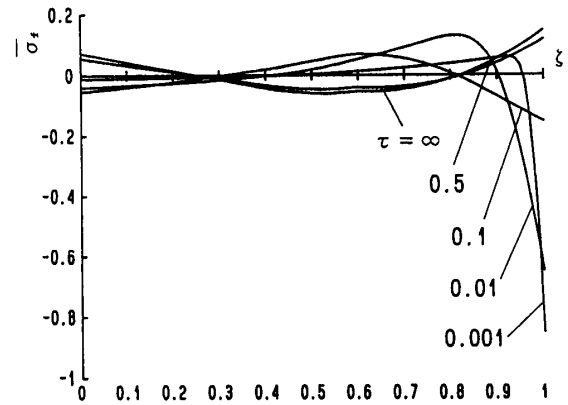


(b) 組成分布②の場合

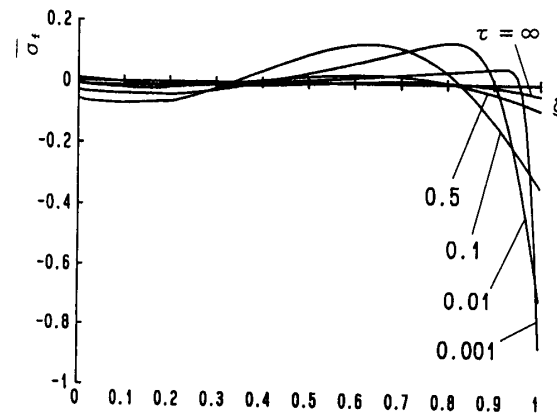


(c) 組成分布③の場合

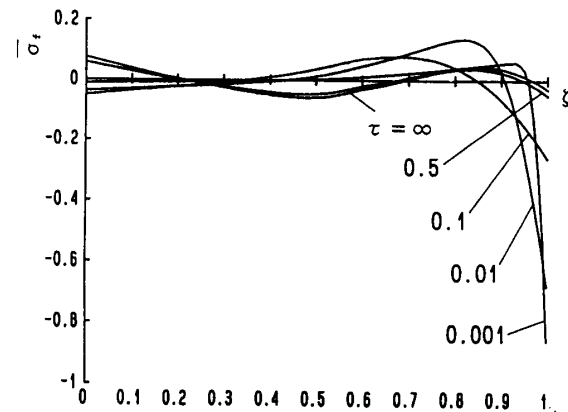
図 7 温度分布の時間的変動 ($\beta_1 = \beta_2 = \infty$)



(a) 組成分布①の場合



(b) 組成分布②の場合



(c) 組成分布③の場合

図 8 熱応力 $\bar{\sigma}_f$ の時間的変動 ($\beta_1 = \beta_2 = \infty$)

次に数値計算例として、SiC(加熱側)とAl(冷却側)からなる、図1に示すType1からType3の3種類の異なる組成分布をもつSiC/Al傾斜機能材料について温度および熱応力の分布を考察する。ここでは便宜上、順に組成分布①、②、③と呼ぶことにする。傾斜機能材料内部の物性値は2章のファジィ推論による推定法により各組成分布について求めた。また、ビオ数 β_1, β_2 については、

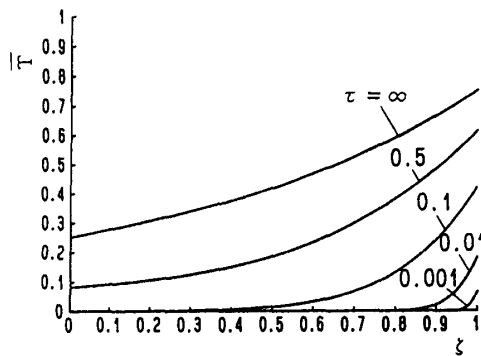
- (1) $\beta_1 = \beta_2 = \infty$ (表面温度落差)
- (2) $\beta_1 = \beta_2 = 1$

の2種類について数値計算を行った。

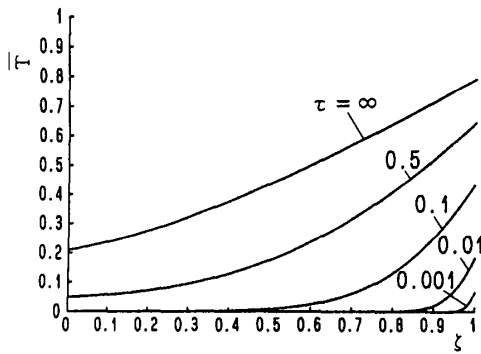
Vodickaの方法によれば、非常に一般的な加熱を受ける傾斜機能平板の多層無限平板としての近似解が比

較的容易に求められたが、ここでの数値計算は加熱条件として時刻 $t=+0$ において低温側の周囲媒体温度が零、高温側のそれが温度 T_0 に保持されるような場合について行った。このとき、式(24)の非定常温度関数を式(28)の無次元量を用いて無次元表示すれば、次式のようになる。

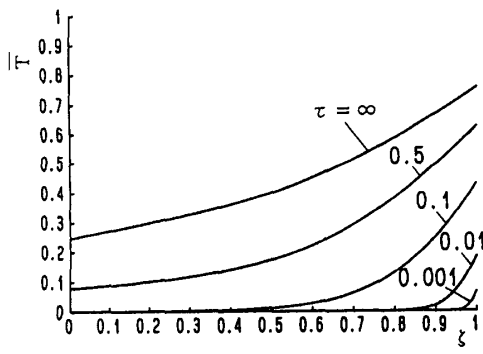
$$\bar{T}_i(\zeta, \tau) = C\zeta + B\bar{\zeta} - \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\tau}_m^2 \tau} \bar{T}_{m2} (\bar{A}_{im} \cos(\bar{d}_{im} \zeta))$$



(a) 組成分布①の場合

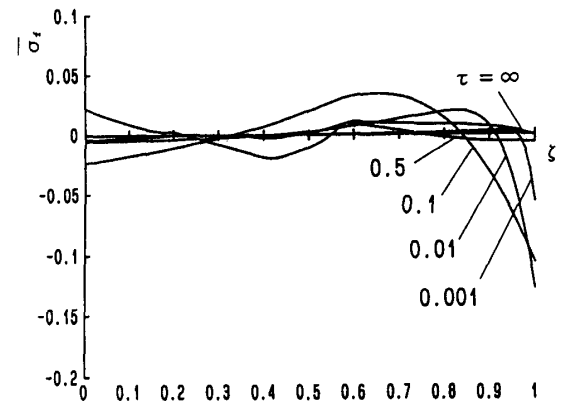


(b) 組成分布②の場合

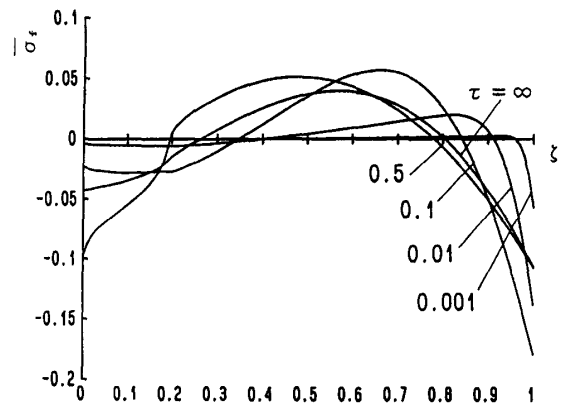


(c) 組成分布③の場合

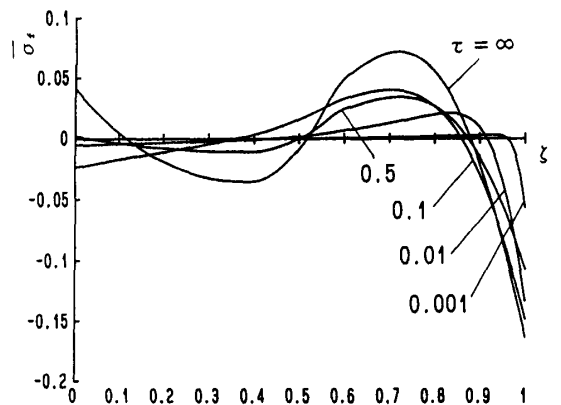
図9 温度分布の時間的変動 ($\beta_1 = \beta_2 = 1$)



(a) 組成分布①の場合



(b) 組成分布②の場合



(c) 組成分布③の場合

図10 熱応力 σ_f の時間的変動 ($\beta_1 = \beta_2 = 1$)

$$+ \bar{B}_{im} \sin(\bar{d}_{im}\zeta) \dots\dots\dots (30)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{im} &= A_{im}/B_{1m}, \bar{B}_{im} = B_{im}/B_{1m} \\ C_{i2}^* &= A_{i2}^* z_n \\ \bar{\gamma}_m &= \gamma_m \cdot z_n / \sqrt{\kappa_1} \\ \bar{d}_{im} &= \bar{\gamma}_m / \sqrt{\kappa_1}, \bar{l}_{mj} = l_{mj} \cdot B_{1m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

まず、熱的境界条件が(1) $\beta_1 = \beta_2 = \infty$ の場合の組成分布①, ②, ③に対する温度分布を図7(a)~(c)に、熱応力分布を図8(a)~(c)に示す。これらのグラフから、傾斜組成分布の違いが温度分布にはあまり影響しないように思われる。しかし、その熱応力分布には傾斜組成分布の違いが大きく影響していることがわかる。特に、組成分布①の場合は定常時に高温側(SiC側, $\zeta=1$)において引張熱応力が生じており、逆に組成分布②および③では圧縮の熱応力が現れている。脆性材料であるセラミックスが引張熱応力に弱いことから考えると、材料設計としては組成分布①よりも組成分布②および③のほうが優れていると考えられる。

次に、熱的境界条件が(2) $\beta_1 = \beta_2 = 1$ の場合の組成分布①, ②, ③に対する温度分布を図9(a)~(c)に、熱応力分布を図10(a)~(c)に示す。この場合も組成分布の影響は温度分布にはあまり影響せず、熱応力分布に大きく影響していることがわかる。しかし、表面温度落差を与えた場合($\beta_1 = \beta_2 = \infty$)に問題となった定常時におけるセラミックス側の引張熱応力は見られず、最大引張熱応力を緩和するという観点では逆に組成分布①が最も有効であると思われる。

5. 結 言

組成分布が任意に変化する傾斜機能材料の非定常温度場を解析するために、傾斜機能材料を仮想的に各層が均質な多層平板に分割し、Vodickaの一次元複合領域の温度解析法を応用することにより、非常に一般的

な熱的境界条件のもとでの近似解析解が得られた。また、弾性熱応力解析のための基本的な材料物性値を、セラミックス-金属混合系として考えた場合の既存の複合則によるマクロ物性値から、特に中間組成でのマクロ物性値を理論ベースで推定することを目的とし、ファジィ理論を応用して物性値を推定した。そして、3種類の異なる組成分布をもつSiC/Al傾斜機能材料について数値計算を行い、以下の結論を得た。

(1) 傾斜機能材料の温度分布は組成分布の影響をあまり受けないが、熱応力分布はその組成分布の影響を大きく受ける。

(2) 熱応力緩和に適した組成分布は、熱的境界条件に大きく影響される。そのため、傾斜機能材料の設計に際しては、詳細に検討された使用熱的環境に応じた材料設計が非常に重要であることがわかる。このことから、熱的環境の不確定性⁽¹²⁾も十分考慮されるべきものと考えられる。

文 献

- (1) 例えば、第5回FGMシンポジウム講演集、(1992-10)、125, 139, 145, 161.
- (2) Sugano, Y., *Ing.-Arch.*, 57-2 (1987), 147.
- (3) 中馬・飯塚・菅野・谷川、関西支部卒研講演会前刷集(1991), S 102; 菅野・飯塚・田中・山口、第69期全国大会講演会, No. 910-62 (1991-10), 58.
- (4) 荒木・牧野・石黒、第4回FGMシンポジウム講演集、(1991-10), 305.
- (5) 荒木・牧野・石黒・三原、機論, 57-544, B (1991), 4235.
- (6) Vodicka, V., *Math. Nach.*, 14-1 (1955), 47.
- (7) 菅野・斉藤・押田、機論, 45-390, A (1979), 152.
- (8) Muramatu, K., Kawasaki, A., Taya, M. and Watanabe, R., *Proc. 1st Int. Sympo.*, FGM, (1990-10), 53, Sendai.
- (9) Mamdani, E. H., *Proc. IEEE*, 121-12 (1974), 1585.
- (10) 菅野、ファジィ制御, (1988), 67, 日刊工業新聞社.
- (11) 平野・若島、日本複合材料学会誌, 17-2 (1991), 45; Hirano, T., Teraki, J. and Yamada, T., *Proc. 1st Int. Sympo.*, FGM, (1990-10), 5, Sendai.
- (12) 菅野・木元、機論, 54-507, A (1988), 1993.