

不均質平板の非定常熱応力の三次元解析*

菅野良弘^{*1}, 佐藤恵一^{*2}
木村範貴^{*3}, 須見尚文^{*4}Three-Dimensional Analysis of Transient Thermal Stresses
in a Nonhomogeneous PlateYoshihiro SUGANO, Keiichi SATO,
Noritaka KIMURA and Naobumi SUMI

This paper is concerned with an approximate three-dimensional analysis of thermal stresses in a nonhomogeneous plate with temperature variation and nonhomogeneous properties only in the thickness direction. The nonhomogeneous plate is approximated as a laminated plate consisting of different homogeneous and isotropic layers which are perfectly bonded to each neighboring layer. The transient temperature field is analyzed by Vodiccka's method for a heat conduction problem in one-dimensional composite regions. The nonhomogeneous thermal and elastic properties are restricted to those symmetric with respect to the mid plane of the plate. The three-dimensional thermal stresses are analyzed using the solutions developed by Rogers and Spencer, which are expressed in terms of the solution of the approximate, two-dimensional, thin-plate, governing equations for an equivalent homogeneous plate.

Key Words: Thermoelasticity, Nonhomogeneous Plate, Three-Dimensional Solution, Functionally Graded Materials, Transient Heating, Analytical Solution

1. 緒 言

当初, スペースプレーンの超耐熱軽量構造材料としての適用を期待し開発された熱応力緩和型傾斜機能材料は, 電気的, 磁氣的, 光学的, 医学的など各種の機能を持った機能性材料への応用⁽¹⁾⁽²⁾も目指して開発が進んでいる。また, 高効率の熱電変換材料としての傾斜機能材料の応用⁽³⁾⁽⁴⁾も急速に高い関心を呼ぶようになってきた。川村ら⁽⁵⁾は, 接合時に大きな熱応力を生じさせず, 繰返し負荷される熱的・機械的荷重に対して十分な強度を有し, また, 核融合反応による高エネルギー中性子の反応にも耐え, 渦電流とプラズマを閉じこめるための磁場との相互作用により生じる電磁力を下げるための電気絶縁性が付与された核融合炉用の電気絶縁性両側対称傾斜機能材料を開発した。また, 宮本ら⁽⁶⁾は, 自己発熱反応法により $Al_2O_3/TiC/Ni$ からなる両側に対称に傾斜した傾斜機能材料平板を創製し, 階層型傾斜機能化によって表面セラミックス層の

圧縮残留応力強化, クラック伝ば方向の制御などの機能が付与できることを示唆している。しかし, 典型的な不均質材料であるこれらの傾斜機能材料の三次元熱応力の解析解を得る手法は, 材料特性間にある特定の制限を設定した Kassir の不均質体の軸対称三次元熱応力解析⁽⁷⁾を除いて, その前段階として必要な三次元非定常温度場の解析法も含めてほとんど確立されていない。傾斜機能平板の二次元熱応力の解析については, 中間層での母相と分散相のあいまいさをファジー推論法により考慮した解析⁽⁸⁾⁽⁹⁾などの報告がある。本研究では, 上記のことをかんがみ, 不均質板の三次元熱応力解析の第一段階として, 不均質性が板中央面に関して対称であるが, 板厚方向にのみ任意の非定常温度分布と不均質性を有する不均質平板の三次元非定常熱応力を, 著者らが既報⁽⁹⁾で提案した Vodiccka⁽¹⁰⁾の複合領域に関する一種の積分変換法を応用した非定常温度場の解析法と, Rogers と Spencer⁽¹¹⁾による板中央面に関して対称な不均質特性を有する不均質体の三次元熱応力解析法により解析する方法を示す。また, 有限不均質平板の端面が自由端の場合について数値計算を行い, 最大引張熱応力と加熱の関係およびその熱応力の緩和に適した組成分布について考察する。

* 1994年10月14日 材料力学部門講演会において講演, 原稿受付 1995年8月11日。

^{*1} 正員, 岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。

^{*2} 学生員, 岩手大学大学院。

^{*3} 岩手大学工学部 [現: マルヤス工業]。

^{*4} 正員, 静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷836)。

2. 不均質板の非定常温度場

板厚方向に z 軸を有する (x, y, z) 座標系を図1のように板の中央面に設定し、この面に関して対称ではあるが、板厚方向に任意の熱的・弾性的不均質性を有する平板が、その両面においてそれぞれ $\phi(t)$, 0なる温度の周囲媒体により加熱される場合の非定常温度場を解析する。不均質板の熱伝導率、密度、比熱を $\lambda(z)$, $\rho(z)$, $c(z)$ とし、板の両面 ($z = \pm h$) における熱伝達率を h_1 とすると、この熱伝導問題の基礎式、初期条件式、境界条件式は、次のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

$$T = 0, \quad t = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + h_1 \{ T - \phi(t) \} = 0, \quad z = h \dots\dots\dots (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - h_1 T = 0, \quad z = -h \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$\lambda(z) = \lambda(-z), \quad \rho(z) = \rho(-z), \quad c(z) = c(-z) \dots\dots\dots (5)$$

上記の熱伝導問題の解 $T(z, t)$ を次式のように分離する。

$$T(z, t) = T_e(z, t) + T_o(z, t) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $T_e(z, t)$, $T_o(z, t)$ はそれぞれ次の基礎式系を満足する対称温度関数と反対称温度関数である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) &= \rho c \frac{\partial T_e}{\partial t} \\ T_e &= 0, \quad t = 0 \\ \lambda \frac{\partial T_e}{\partial z} + h_1 \{ T_e - \phi(t) / 2 \} &= 0, \quad z = h \\ \lambda \frac{\partial T_e}{\partial z} - h_1 \{ T_e - \phi(t) / 2 \} &= 0, \quad z = -h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T_o}{\partial z} \right) &= \rho c \frac{\partial T_o}{\partial t} \\ T_o &= 0, \quad t = 0 \\ \lambda \frac{\partial T_o}{\partial z} + h_1 \{ T_o - \phi(t) / 2 \} &= 0, \quad z = h \\ \lambda \frac{\partial T_o}{\partial z} - h_1 \{ T_o + \phi(t) / 2 \} &= 0, \quad z = -h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

まず、板厚方向の任意の不均質性に対処するため、図1のように不均質板を $2n$ 個の相異なる熱特性を有する等方性、等厚の薄い均質層に分割する。

式(7)の対称温度場を板の中央面 ($z = 0$) から板上面 ($z = h$) までの n 層について解析する。第 i 層の温度関数を $T_{ei}(z, t)$ とし、前報⁽⁹⁾を参照して、複合領域に対する一種の積分変換法である Vodicka の手法⁽¹⁰⁾を応用することにより、この温度関数を次式のように得る。

$$T_{ei}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{em}(t) R_{eim}(z) + \sum_{j=1}^2 L_{eij}(z) P_{ej}(t) \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

$$P_{e2}(t) = \phi(t) / 2 \dots\dots\dots (10)$$

また、 $R_{eim}(z)$ は式(7)に対する固有値問題の解であり、 $L_{eij}(z)$ は次式の解である。

$$\frac{d^2 L_{eij}(z)}{dz^2} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

固有値問題の解 $R_{eim}(z)$ は次式となる。

$$R_{eim}(z) = A_{eim} \cos(d_{eim}z) + B_{eim} \sin(d_{eim}z) \dots\dots\dots (12)$$

固有関数 $R_{eim}(z)$ は不連続な重み関数に対して次式の直交関係を有している。

$$\sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\lambda_i}{\kappa_i} R_{eim}(z) R_{eik}(z) dz = \begin{cases} \text{const.} & (m = k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 λ_i, κ_i は第 i 層の熱伝導率、温度伝導率である。

式(13)の直交関係を利用し、式(11)の解 $L_{eij}(z)$ を固有関数 $R_{eim}(z)$ で展開して、それを式(12)とともに式(9)に代入し、さらに、式(7)の基礎微分方程式に代入すると $Q_{em}(t)$ に関する一階線形微分方程式が得られ、最終的に温度関数 $T_{ei}(z, t)$ は次式となる。

$$T_{ei}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{em}(t) \{ A_{eim} \cos(d_{eim}z) \}$$

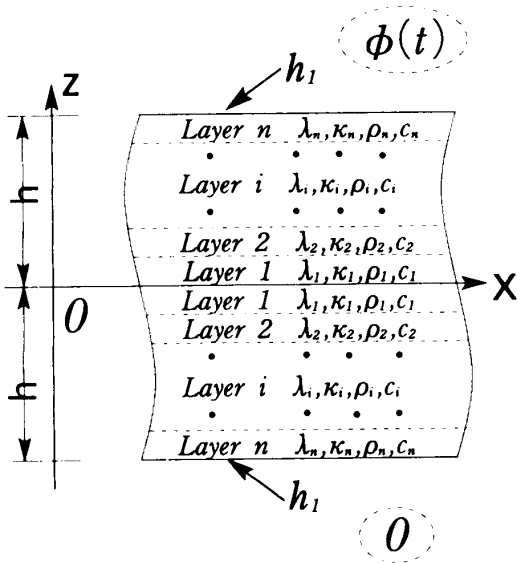


Fig. 1 Nonhomogeneous plate and thermal boundary conditions

$$+ B_{eim} \sin(d_{eim}z) + \sum_{j=1}^2 L_{eij}(z)P_{ej}(t) \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$L_{e11}(z)=0, \quad L_{e12}(z)=1, \quad Q_{em}(t)=-\frac{1}{2}e^{-\gamma_{em}t} \int_0^t e^{\gamma_{em}t'} l_{em2} \frac{d\phi(t')}{dt'} dt' \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 l_{em2} は $L_{e12}(z)$ を $R_{eim}(z)$ で展開したときの展開係数であり、 $\gamma_{em} (=d_{eim}\sqrt{\kappa_i})$ は次の超越方程式の第 m 番目の正根である。

$$G_e \cdot E_{en-1}^m \cdot E_{en-2}^m \cdots E_{e2}^m \cdot E_{e1}^m \cdot a_{e1} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_{ei} &= \begin{bmatrix} A_{eim} \\ B_{eim} \end{bmatrix} \\ G_e &= \begin{bmatrix} -\lambda_n d_{enm} \sin(d_{enm}z_n) + h_1 \cos(d_{enm}z_n) & \lambda_n d_{enm} \cos(d_{enm}z_n) + h_1 \sin(d_{enm}z_n) \\ X_{eim} \cos(\alpha_{eim}z_i) + Y_{eim} \cos(\beta_{eim}z_i) & X_{eim} \sin(\alpha_{eim}z_i) - Y_{eim} \sin(\beta_{eim}z_i) \\ X_{eim} \sin(\alpha_{eim}z_i) + Y_{eim} \sin(\beta_{eim}z_i) & -X_{eim} \cos(\alpha_{eim}z_i) + Y_{eim} \cos(\beta_{eim}z_i) \end{bmatrix} \\ E_{ei}^m &= \begin{bmatrix} X_{eim} \cos(\alpha_{eim}z_i) + Y_{eim} \cos(\beta_{eim}z_i) & X_{eim} \sin(\alpha_{eim}z_i) - Y_{eim} \sin(\beta_{eim}z_i) \\ X_{eim} \sin(\alpha_{eim}z_i) + Y_{eim} \sin(\beta_{eim}z_i) & -X_{eim} \cos(\alpha_{eim}z_i) + Y_{eim} \cos(\beta_{eim}z_i) \end{bmatrix} \\ X_{eim} &= (1 - \varepsilon_{eim;ei+1m})/2, \quad Y_{eim} = (1 + \varepsilon_{eim;ei+1m})/2 \\ \alpha_{eim} &= d_{ei+1m} + d_{eim}, \quad \beta_{eim} = d_{ei+1m} - d_{eim}, \quad \varepsilon_{eim;ei+1m} = \frac{\lambda_i d_{eim}}{\lambda_{i+1} d_{ei+1m}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

同様に、式(8)の反対称温度場を板の中央面($z=0$)から板上面($z=h$)までの n 層について解析する。第 i 層の温度関数を $T_{oi}(z, t)$ とし、 $z=0$ において $T_{oi}(0, t)=0$ であることを考慮すると次式となる。

$$T_{oi}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{om}(t)R_{oim}(z) + \sum_{j=1}^2 L_{oj}(z)P_{oj}(t) \dots\dots\dots (18)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} P_{o1}(t) &= 0, \quad P_{o2}(t) = \phi(t)/2 \\ R_{oim}(z) &= A_{oim} \cos(d_{oim}z) + B_{oim} \sin(d_{oim}z) \\ L_{oi2}(z) &= A_{oi2}^* z + B_{oi2}^* \\ Q_{om}(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\gamma_{om}t} \int_0^t e^{\gamma_{om}t'} l_{om2} \frac{d\phi(t')}{dt'} dt' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 l_{om2} は $L_{oi2}(z)$ を $R_{oim}(z)$ で展開したときの展開係数であり、 $\gamma_{om} (=d_{oim}\sqrt{\kappa_i})$ は次式の超越方程式の第 m 番目の正根である。

$$G_o \cdot E_{on-1}^m \cdot E_{on-2}^m \cdots E_{o2}^m \cdot E_{o1}^m \cdot a_{o1} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 a_{oi} 、 G_o 、 E_{oi}^m は式(17)における a_{ei} 、 G_e 、 E_{ei}^m において諸量の下添字 e を o に変換することで得られる。

また、調和関数 $L_{oi2}(z)$ の未知係数 A_{oi2}^* 、 B_{oi2}^* は次式により決定される。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{oi2}^* \\ B_{oi2}^* \end{bmatrix} &= -h_1 \begin{bmatrix} \lambda_{1/n} \\ \Lambda \left[\sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{1/k} - \lambda_{1/k+1}) z_k \right] \end{bmatrix} \\ \Lambda &= -\lambda_{1/n}(\lambda_n + h_1 z_n) - h_1 \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{1/k} - \lambda_{1/k+1}) z_k \\ \lambda_{1/i} &= \lambda_i / \lambda_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

3. 不均質板の三次元熱応力解析

上記の非定常温度場に対する不均質板の三次元熱応力を、板内において $\sigma_{zz}=0$ が仮定できるものとして、Rogers と Spencer の手法⁽¹¹⁾により相当均質板の薄板理論の解を用いて解析する。ここでは、対称温度場と反対称温度場のそれぞれによる熱応力を熱応力緩和の観点から考察するため別々に解析する。

3.1 対称温度場 $T_e(z, t)$ による熱応力

対称温度場による熱変位は、面内変位である x, y 方向変位 u, v については座標 z に関して偶関数、横方向変位 w については z に関して奇関数であり、次式のように表現できる⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \bar{u}(x, y) + F(z)\hat{\Delta}_x \\ v(x, y, z) &= \bar{v}(x, y) + F(z)\hat{\Delta}_y \\ w(x, y, z) &= G(z)\hat{\Delta} + K(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $F(z)$ 、 $G(z)$ 、 $K(z)$ は後述のように応力の釣合い条件式などから決定されるべき未知関数であり、 $F(z)$ は z の偶関数、 $G(z)$ 、 $K(z)$ は z の奇関数である。また、 \bar{u} 、 \bar{v} はラーメの定数 λ_c 、 μ をもつ相当均質板の薄板理論の解から得られ、関数 $\hat{\Delta}$ 、 $\hat{\Omega}$ と次式の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} \hat{I}\hat{\Delta}_x - \hat{\mu}\hat{\Omega}_y &= 0, \quad \hat{I}\hat{\Delta}_y + \hat{\mu}\hat{\Omega}_x = 0 \\ \hat{\Delta} &= \bar{u}_x + \bar{v}_y, \quad \hat{\Omega} = \bar{v}_x - \bar{u}_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\nabla^2 \hat{\Delta} = 0, \quad \nabla^2 \hat{\Omega} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 、 \hat{I} 、 $\hat{\mu}$ は、解析対象の不均質板のラーメの定数 $\lambda_c(z)$ 、 $\mu(z)$ から次式によって得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\bar{l}, \bar{\mu}) &= (1/h) \int_0^h (l, \mu) dz \\ l &= 2\mu(\eta + 1), \quad \eta = \lambda_c / (\lambda_c + 2\mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

式(22)の変位成分を不均質板の変位表示のフックの法則に代入すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \bar{u}_{,x} + \lambda_c(1 + G_{,z})\bar{\Delta} + 2\mu F\bar{\Delta}_{,xx} \\ &\quad + \lambda_c K_{,z} - \beta T_e \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \bar{v}_{,y} + \lambda_c(1 + G_{,z})\bar{\Delta} + 2\mu F\bar{\Delta}_{,yy} \\ &\quad + \lambda_c K_{,z} - \beta T_e \\ \sigma_{xy} &= \mu(\bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x}) + 2\mu F\bar{\Delta}_{,xy} \\ \sigma_{xz} &= \mu(F_{,z} + G)\bar{\Delta}_{,x}, \quad \sigma_{yz} = \mu(F_{,z} + G)\bar{\Delta}_{,y} \\ \sigma_{zz} &= \{\lambda_c + (\lambda_c + 2\mu)G_{,z}\}\bar{\Delta} + (\lambda_c + 2\mu)K_{,z} - \beta T_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 $\beta = \alpha(3\lambda_c + 2\mu)$ 、 α は線膨張係数である。

板上下面において外力の作用のない場合、境界条件式は次式となる。

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0, \quad z = \pm h \dots\dots\dots (27)$$

式(26)_{4,5}を三次元応力状態のz方向の応力の釣合い式に代入し、式(27)の $(\sigma_{zz})_{z=\pm h} = 0$ を考慮すると、板内の至るところで次式を得る。

$$\sigma_{zz} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

したがって、式(22)の未知関数 $F(z)$ 、 $G(z)$ 、 $K(z)$ は、式(28)と x, y 方向の応力の釣合い式より次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} G(z) &= - \int_0^z \eta(s) ds \\ K(z, t) &= \int_0^z \gamma(s) T_e(s, t) ds \\ F(z) &= \int_0^z \{ -G(s) + \{ (\bar{l}/\bar{\mu}) M_0(s) \\ &\quad - L_0(s) \} / \mu(s) \} ds + k_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \beta / (\lambda_c + 2\mu) \\ M_0(z) &= \int_0^z \mu(s) ds, \quad L_0(z) = \int_0^z l(s) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots (30)$$

式(29)を式(26)に代入すると、最終的な応力成分式は次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= l\bar{u}_{,x} + (l - 2\mu)\bar{v}_{,y} + 2\mu F\bar{\Delta}_{,xx} - \beta^* T_e \\ \sigma_{yy} &= (l - 2\mu)\bar{u}_{,x} + l\bar{v}_{,y} + 2\mu F\bar{\Delta}_{,yy} - \beta^* T_e \\ \sigma_{zz} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= \mu(\bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x}) + 2\mu F\bar{\Delta}_{,xy} \\ \sigma_{xz} &= \{ \bar{l}M_0(z) / \bar{\mu} - L_0(z) \} \bar{\Delta}_{,x} \\ \sigma_{yz} &= \{ \bar{l}M_0(z) / \bar{\mu} - L_0(z) \} \bar{\Delta}_{,y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 $\beta^* = E(z)\alpha(z) / \{1 - \nu(z)\}$ である。

次に、解析対象としてヤング率 $E = E(z)$ 、線膨張係

数 $\alpha = \alpha(z)$ 、ポアソン比 $\nu = \text{const.}$ の不均質板を考察することにすれば、 $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ となる。また、

$$F(z) = \{ \nu / 2(1 - \nu) \} z^2 + k_0 \dots\dots\dots (32)$$

ここで、定数 k_0 は板の端部における境界条件により、次式によって決定される⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^h F(z) dz &= 0 \quad (\text{変位指定の場合}) \\ \int_0^h \mu(z) F(z) dz &= 0 \quad (\text{外力指定の場合}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

3.2 反対称温度場 $T_{oi}(z, t)$ による熱応力 板の曲げをもたらす反対称温度場による変位成分は、次式のように表現できる⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \{ A(z)\bar{w}(x, y) + B(z)\nabla^2 \bar{w}(x, y) \}_{,x} \\ v(x, y, z) &= \{ A(z)\bar{w}(x, y) + B(z)\nabla^2 \bar{w}(x, y) \}_{,y} \\ w(x, y, z) &= \bar{w}(x, y) + C(z)\nabla^2 \bar{w}(x, y) + D(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

ここで、関数 $\bar{w}(x, y)$ はラーメの定数 $\bar{\lambda}_c, \bar{\mu}$ をもつ、相当均質板のたわみであり、次式の二次元重調和方程式を満足する。

$$\nabla^4 \bar{w}(x, y) = 0 \dots\dots\dots (35)$$

ただし、 $\bar{\lambda}_c, \bar{\mu}$ は次式で与えられる。

$$(\bar{\lambda}_c, \bar{\mu}) = (3/2h^3) \int_{-h}^h \{ \lambda_c(z), \mu(z) \} z^2 dz \dots\dots (36)$$

式(34)を不均質板の変位表示のフックの法則に代入し、応力の釣合い式、式(27)の境界条件式、式(35)を考慮すれば、最終的な応力成分式は次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -z \{ l\bar{w}_{,xx} + (l - 2\mu)\bar{w}_{,yy} \} \\ &\quad + 2\mu B\nabla^2 \bar{w}_{,xx} - \beta^* T_o \\ \sigma_{yy} &= -z \{ (l - 2\mu)\bar{w}_{,xx} + l\bar{w}_{,yy} \} \\ &\quad + 2\mu B\nabla^2 \bar{w}_{,yy} - \beta^* T_o \\ \sigma_{zz} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= 2\mu(-z\bar{w} + B\nabla^2 \bar{w})_{,xy} \\ \sigma_{xz} &= \{ L_1(z) - L_1(h) \} (\nabla^2 \bar{w})_{,x} \\ \sigma_{yz} &= \{ L_1(z) - L_1(h) \} (\nabla^2 \bar{w})_{,y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} B(z) &= - \int_0^z sl(s) R_0(s) ds + \{ L_1(z) - L_1(h) \} \\ &\quad \times R_0(z) + N_2(z) - \{ N_1(z) + k_1 \} z \\ D(z) &= \int_0^z \gamma(s) T_o(s, t) ds + k_2 \\ R_0(z) &= \int_0^z 1/\mu(s) ds, \quad L_1(z) = \int_0^z sl(s) ds \\ N_1(z) &= \int_0^z s\eta(s) ds, \quad N_2(z) = \int_0^z s^2 \eta(s) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

さらに、式(38)の $B(z)$ 、 $D(z)$ の定数 k_1, k_2 は、端部のたわみが指定され、中央面のたわみ $w(x, y, 0)$ が相当

均質板のたわみ $\bar{w}(x, y)$ に一致する条件が付加されるならば, $k_1=0$ となる。一方端部でモーメントが指定され, その曲げモーメントが相当均質板の曲げモーメントに一致する条件が付加されるならば, k_1 は次式から決定される⁽¹¹⁾。 k_2 は z 方向の剛体変位に相当し, 零とおける。

$$\int_0^h z\mu(z)B(z)dz=0 \dots\dots\dots(39)$$

4. 自由端をもつ長方形不均質板の三次元熱応力

一例として, 端部を自由端とし, 非定常温度場 $T(z, t)$ を受ける, 縦横 $2a \times 2b$, 板厚 $2h$ の長方形不均質板の熱応力を解析する。不均質板のヤング率を $E(z)$, 線膨張係数を $\alpha(z)$, ポアソン比を ν (一定) とする。まず, 対称温度場 $T_e(z, t)$ による熱応力を解析する。端部を自由端とする場合, 境界条件式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} N_{xx}=0, \quad N_{xy}=0, \quad x=\pm a \\ N_{yy}=0, \quad N_{xy}=0, \quad y=\pm b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

ここで,

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, \dots) = \int_{-h}^h (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \dots) dz \dots\dots\dots(41)$$

対称温度場による熱応力成分式(31)を端部の境界条件式(40)に代入し, \bar{u}, \bar{v} で表すと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x=\pm a \text{ で } \bar{l}\bar{u}_{,x} + (\bar{l}-2\bar{\mu})\bar{v}_{,y} - \bar{T}_e^* = 0, \\ \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} = 0 \\ y=\pm b \text{ で } (\bar{l}-2\bar{\mu})\bar{u}_{,x} + \bar{l}\bar{v}_{,y} - \bar{T}_e^* = 0, \\ \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

ここで,

$$\bar{T}_e^* = (1/h) \int_0^h \beta^* T_e dz \dots\dots\dots(43)$$

次に, 式(24)の第1式と第2式を x, y で微分することにより, $\nabla^4 \bar{u} = 0$ と $\nabla^4 \bar{v} = 0$ を得る。この重調和関数 \bar{u}, \bar{v} の未知係数を端部の境界条件式(42)から決定すれば, 次式が得られる。

$$\bar{u} = x\bar{T}_e^*/\{2(\bar{l}-\bar{\mu})\}, \quad \bar{v} = y\bar{T}_e^*/\{2(\bar{l}-\bar{\mu})\} \dots\dots\dots(44)$$

したがって, 上式を対称温度場による熱応力成分式(31)に代入すれば, 端部を自由端とする長方形不均質板の熱応力成分が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{h\bar{T}_e^*}{I_1(h)} E(z) - \frac{\alpha(z)E(z)}{1-\nu} T_e(z, t) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

ただし

$$I_1(z) = \int_0^z E(s) ds \dots\dots\dots(46)$$

次に, 反対称温度場 $T_o(z, t)$ による熱応力を解析する。端部を自由端とする場合, 境界条件式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xx}=0, \quad N_{xz} - (\partial M_{xy}/\partial y) = 0, \quad x=\pm a \\ M_{yy}=0, \quad N_{yz} - (\partial M_{xy}/\partial x) = 0, \quad y=\pm b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

ここで,

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, \dots) = \int_{-h}^h (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \dots) z dz \dots\dots\dots(48)$$

反対称温度場による熱応力成分式(37)を端部の境界条件式(47)に代入して, 式(35)より得られる重調和関数 \bar{w} の未知係数を決定すれば, 関数 \bar{w} は次式のように得られる。

$$\bar{w} = -(x^2 + y^2)\bar{T}_o^*/\{4(\bar{l}-\bar{\mu})\} \dots\dots\dots(49)$$

ここで,

$$\bar{l} = (3/2h^3) \int_{-h}^h lz^2 dz, \quad \bar{T}_o^* = (3/2h^3) \int_{-h}^h \beta^* T_o z dz \dots\dots\dots(50)$$

したがって, 上式を反対称温度場による熱応力成分式(37)に代入すれば, 端部を自由端とする長方形不均質板の熱応力成分が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{h^3\bar{T}_o^*}{3I_2(h)} zE(z) - \frac{\alpha(z)E(z)}{1-\nu} T_o(z, t) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

ただし,

$$I_2(z) = \int_0^z s^2 E(s) ds \dots\dots\dots(52)$$

板厚方向にのみ温度分布をもつ自由端の場合, 不均質長方形板の熱応力式(45), (51)は板のサイズに依存しない。

5. 数値計算例と考察

数値計算例として, 端部を自由端とする縦横 $2a \times 2b$, 板厚が $2h$ の長方形不均質板の上下面が, それぞれ温度 $\phi(t) = T_0, 0$ に加熱される場合(熱伝達率 $h_1 =$

Table 1 Material properties of PSZ and SUS 304

	PSZ	SUS304
Thermal Conductivity λ (W/m·K)	1.67	15.97
Young's Modulus E (GPa)	211	193
Coefficient of Linear Thermal Expansion α ($\times 10^{-6}$ 1/K)	2.93	14.87
Density ρ (kg/m ³)	5730	7930
Specific Heat c (kJ/kg·K)	0.467	0.361

∞)の非定常温度分布および熱応力分布を考察する。数値計算に採用した不均質材料はPSZ(部分安定化ジルコニア)とSUS 304(オーステナイト系ステンレス)からなる傾斜機能材料であり、これらの材料特性を表1に示す。

数値計算において、次式の無次元量を導入した。

$$\left. \begin{aligned} \zeta = z/h, \quad \tau = \alpha_1 t/h^2, \quad \bar{T} = T/T_0 \\ \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\{E_1 \alpha_1 T_0/(1-\nu)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(53)$$

α_1, E_1, ν は板中央面に位置する第1層の各物性値を示す。

傾斜組成分布としては、従来から熱応力緩和に効果があるとされる無次元板厚座標 ζ のS字形分布とべき乗形分布を採用し、それぞれセラミックリッチ型とメタルリッチ型の場合に分けて次式で定義した。

S字形分布の場合：

$$\left. \begin{aligned} \text{(i) } 0 \leq \zeta \leq P_1 \text{ のとき} \\ \xi(\zeta) = \zeta^2/P_1 \\ \text{(ii) } P_1 < \zeta \leq 1 \text{ のとき} \\ \xi(\zeta) = (\zeta-1)^2/(P_1-1)+1 \end{aligned} \right\} \text{(Ceramic Rich)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(i) } 0 \leq \zeta \leq P_1 \text{ のとき} \\ \xi(\zeta) = -\zeta^2/P_1 + 2\zeta \\ \text{(ii) } P_1 < \zeta \leq 1 \text{ のとき} \\ \xi(\zeta) = -(\zeta-1)^2/(P_1-1) + 2\zeta - 1 \end{aligned} \right\} \text{(Ceramic Poor)}$$

.....(54)

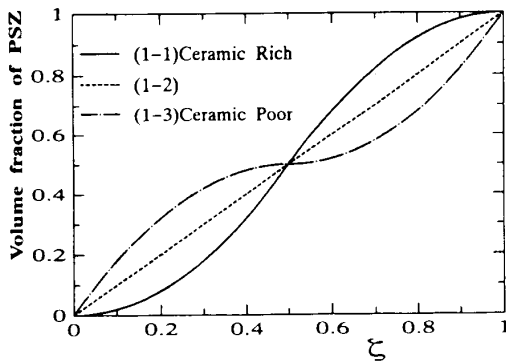


Fig. 2 S-shaped gradient compositions

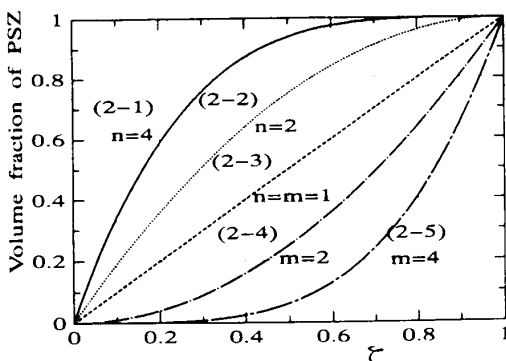
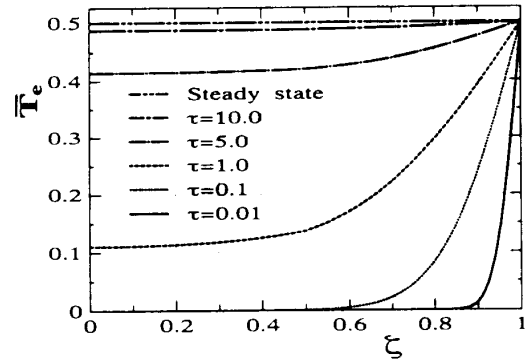


Fig. 3 Gradient compositions of power type

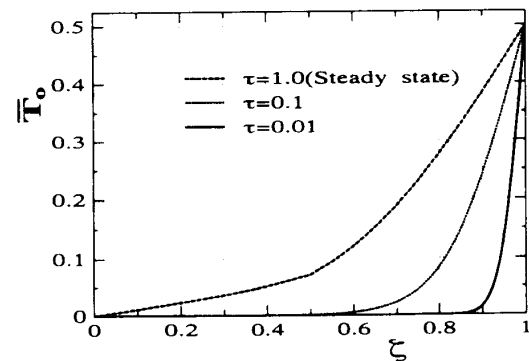
べき乗形分布の場合：

$$\left. \begin{aligned} \xi(\zeta) = 1 - (1-\zeta)^n \quad \text{(Ceramic Rich)} \\ \xi(\zeta) = \zeta^m \quad \text{(Ceramic Poor)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

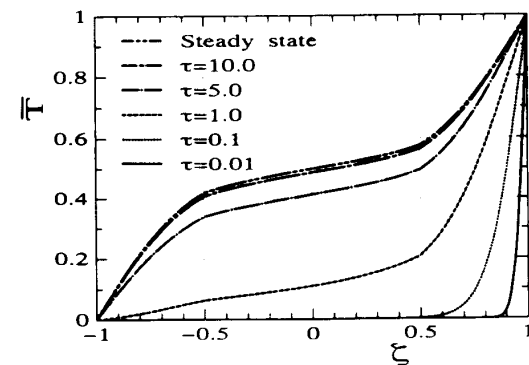
ここで、 P_1 は無次元板厚座標 ζ における変曲点の位置であり、 $P_1=0.5$ とした。図2, 3にS字形分布とべき乗形分布をPSZの組成分布について示す。PSZ/SUS 304系傾斜機能材料の各層における材料特性は、母相に球状粒子を分散させるものとし、Mori-



(a) Temperature distributions due to symmetric heating



(b) Temperature distributions due to anti-symmetric heating



(c) Temperature distributions

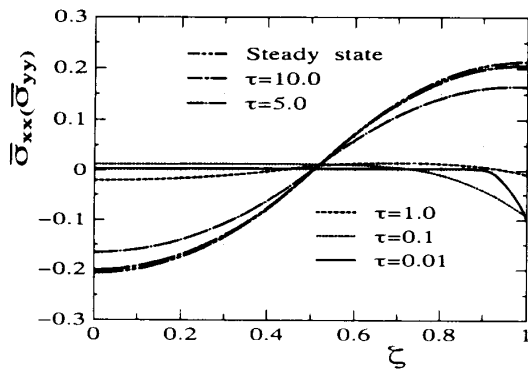
Fig. 4 Temperature distributions in the non-homogeneous plate with gradient composition of type (1-1)

Tanaka の理論⁽¹²⁾ により決定した。なお、ポアソン比 ν は一定値 0.3 とした。

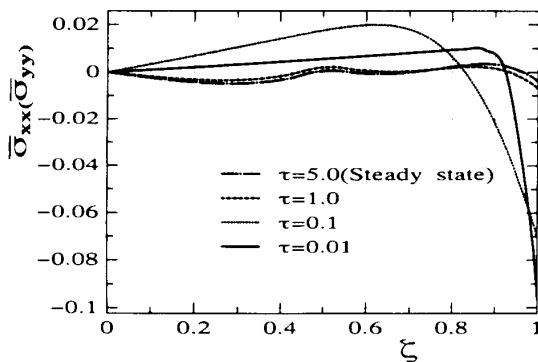
図 4(a), (b), (c) に、S 字形分布のセラミックリッチな分布(1-1)をもつ不均質平板が、それぞれ式 (7), (8), (3), (4) の加熱を受けた場合の各温度分布を示した。対称加熱による温度分布を示す図 4(a) より、加熱初期 $\tau=0.01$ では表面 $\xi=\pm 1$ の近傍のみに温度上昇が存在し、 $\tau=10.0$ ではほぼ定常状態に達し、板全体が一様温度 0.5 になっている。図 4(b) は、反対称加熱による温度分布であり、加熱初期の τ

$=0.01$ では、表面 $\xi=1$ の近傍において図 4(a) と同一の温度分布を呈しているが、対称加熱を受ける場合と顕著に異なり、 $\tau=1.0$ において既に定常状態に達し、板厚方向に大きな温度こう配を有する下に凸の温度分布を示している。図 4(c) は、図 4(a) と (b) を加え合わせた全体の温度分布であり、 $\tau \geq 5.0$ では近似的に三つの区間 $-1 \leq \xi \leq -0.5$, $-0.5 \leq \xi \leq 0.5$, $0.5 \leq \xi \leq 1$ をそれぞれ傾きの異なる 3 直線で表現した分布となっている。傾斜組成分布(1-1)は、直線分布(1-2)と比較して、加熱面($\xi=1$)近傍で熱伝導率の小さいセラミックリッチな分布であるため、加熱面付近ではより低い温度分布を、また、低温側($\xi=-1$)近傍では逆により高い温度分布を示す。

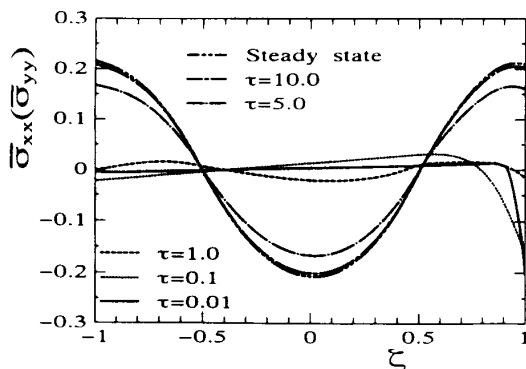
次に、図 5(a), (b), (c) は傾斜組成分布(1-1)の不均質板のそれぞれ図 4(a), (b), (c) の温度分布による熱応力 $\bar{\sigma}_{xx} (= \bar{\sigma}_{yy})$ の分布を示す。図 5(a), (b) の加熱初期 $\tau=0.01$ の $0 \leq \xi \leq 1$ の熱応力分布はほぼ同一であるが、加熱時間の経過した $\tau=5, 10$, および定常の熱応力分布は全く異なる。対称加熱による定常時の温度分布は図 4(a) のように板全体が一様とな



(a) Thermal stresses due to symmetric heating



(b) Thermal stresses due to anti symmetric heating



(c) Thermal stresses

Fig. 5 Thermal stresses in the nonhomogeneous plate with gradient composition of type (1-1)

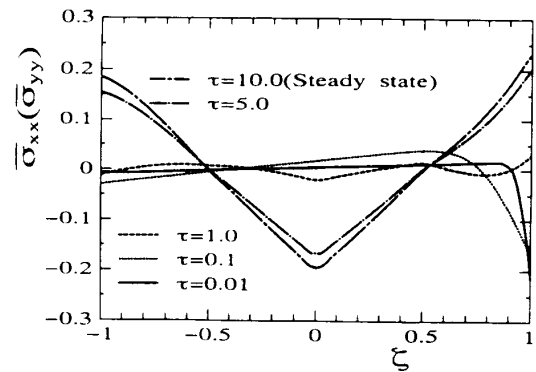


Fig. 6 Thermal stresses in the nonhomogeneous plate with gradient composition of type (1-2)

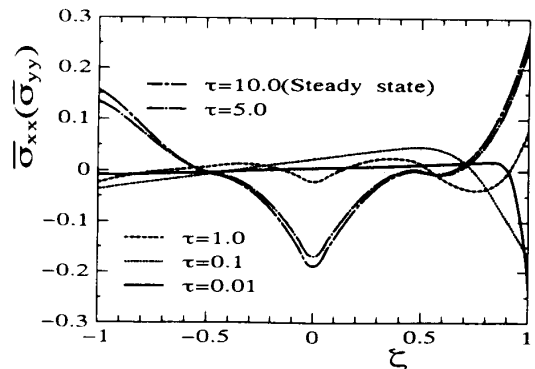


Fig. 7 Thermal stresses in the nonhomogeneous plate with gradient composition of type (1-3)

り、もし均質体なら熱応力零となるが、不均質性をもたせたために、図5(a)のように板表面($\zeta = \pm 1$)近辺で引張熱応力、板内部($-0.5 \leq \zeta \leq 0.5$)で圧縮熱応力を示している。一方、図5(b)の定常時($\tau = 5.0$)の熱応力 $\bar{\sigma}_{xx}$ ($\bar{\sigma}_{yy}$)の分布は板の至るところでほぼ零に近い値を示している。図5(c)は図5(a)、(b)を加え合わせたものである。ただし、反対称加熱による熱応力分布の $-1 \leq \zeta \leq 0$ の値は、図5(b)の $0 \leq \zeta \leq 1$ の値とは同値、逆符号の値である。図5(c)より、加熱時間の十分経過した $\tau \geq 5$ の大きな引張熱応力(板表面)と圧縮熱応力(板中央)は、ほぼすべてが対称な不均質性をもった不均質板を対称加熱したことに起因する図5(a)の熱応力分布と同一である。高温に耐え、靱性を付加するためにセラミックと金属を使用せねばならず、これを従来のようにただ接合せず、セラミックと金属からなる傾斜機能材料(典型的な不均質材料)を考えたことにより、対称加熱を受け温度一様となった定常状態において、均質体なら熱応力零となることを最大引張熱応力が生じている。

次に、図6は、図2の直線分布(1-2)をもつ不均質平

板の熱応力分布を示したものである。加熱初期の板表面近辺しか温度上昇がない $\tau = 0.01, 0.1$ では、傾斜組成分布に依存せず図5(c)とほぼ同一の熱応力分布を示している。定常状態における板表面の最大引張熱応力が $\zeta = 1$ でわずかに増大し、 $\zeta = -1$ で約13%緩和されている。この $\zeta = -1$ での熱応力緩和は、直線分布(1-2)のほうがセラミックリッチな分布(1-1)より $\zeta = -1$ 近辺において熱膨張係数が大きくなり、最も熱膨張する板中央面との熱膨張差が小さくなるために生じる。

次に、図7は、図2のセラミックプアな傾斜組成分布(1-3)に対する熱応力分布を示す。定常状態において図5(c)と比較すると、セラミックプアな分布(1-3)の場合は、セラミックリッチな分布(1-1)の場合より加熱面($\zeta = 1$)における最大引張熱応力は約30%増大し、低温側の板表面($\zeta = -1$)での引張熱応力は逆に約30%緩和されている。定常状態の加熱面における最大引張熱応力は、図5(b)の反対称加熱を受ける加熱面の定常時の熱応力が約0.004の圧縮熱応力であったのに対し、セラミックプアな分布(1-3)の場合、図示していないが反対称加熱による加熱面の熱応力が約0.056の

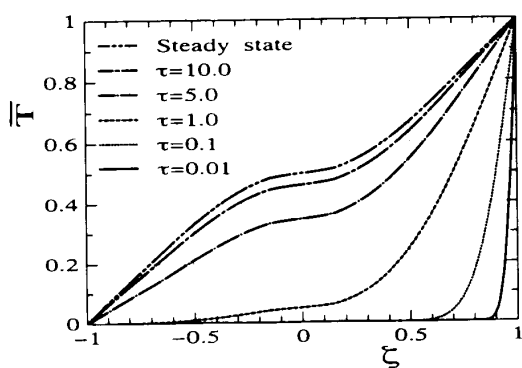


Fig. 8 Temperature distributions in the non-homogeneous plate with gradient composition of type (2-1)

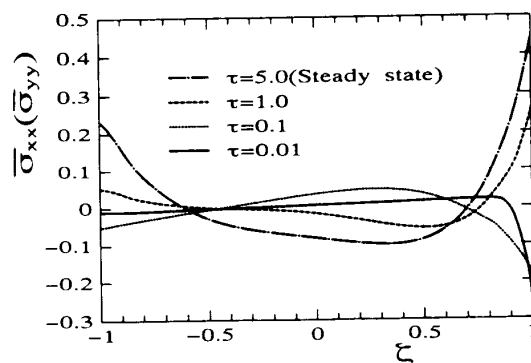


Fig. 10 Thermal stresses in the nonhomogeneous plate with gradient composition of type (2-5)

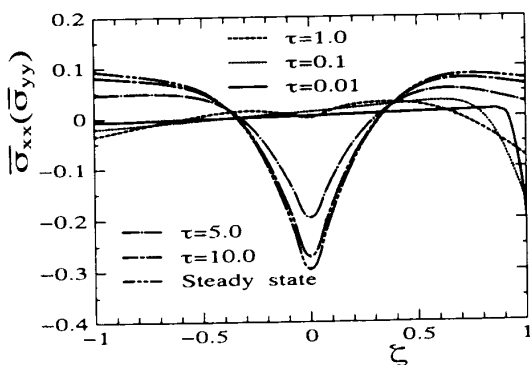


Fig. 9 Thermal stresses in the nonhomogeneous plate with gradient composition of type (2-1)

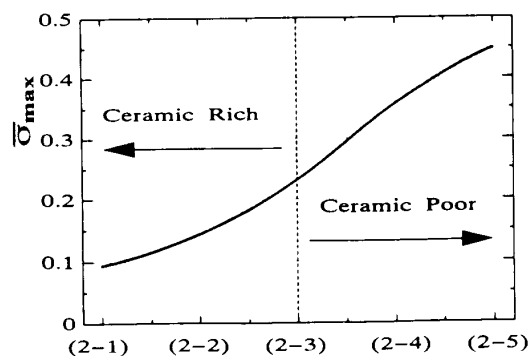


Fig. 11 Relationship between gradient compositions of power type and maximum tensile thermal stresses

引張熱応力となったためである。もちろん反対称加熱によって生じる熱応力ゆえ、低温側の板表面では逆に約0.056の圧縮熱応力となるため、これが板表面 $\xi = -1$ の引張熱応力が約30%緩和される原因となっている。

図8は、図3の(2-1)のセラミックリッチな分布をもつ不均質平板の温度分布を示したものであり、図4(c)と比較すると図2の(1-1)のセラミックリッチな傾斜組成分布の場合より、板全域においてさらにセラミックリッチであるために加熱面($\xi = 1$)近辺では図4(c)より高い温度を示し、低温側の板表面($\xi = -1$)近辺では逆に図4(c)より低い温度を示している。

次に、図9は、図3の(2-1)の傾斜組成分布をもつ不均質平板が図8の温度分布を受ける場合の熱応力分布を示す。図2の(1-1)のセラミックリッチな傾斜組成分布をもつ場合の図5(c)の熱応力分布と比較すると、加熱初期の熱応力分布はほとんど変わらないが、定常状態において板中央面の最大圧縮熱応力が約50%増大し、板両表面に生じる最大引張熱応力が約45%以下に緩和されていることがわかる。

次に、図10は、図3の(2-5)のセラミックプアな傾斜組成分布をもつ不均質板の熱応力を示す。定常状態における熱応力分布を図9と比較すると、板内部の最大圧縮熱応力は約30%に大きく緩和されるが、板両表面の引張熱応力は大きく増大し、特に、加熱面側では約6.0倍に増大している。板両表面ではセラミック100%であることから、セラミックプアな傾斜組成分布(2-5)は最も危険な応力状態を生じさせることがわかる。以上、S字形傾斜組成分布の場合、熱応力緩和効果は小さいので、べき乗形の傾斜組成分布(2-1)、(2-3)、(2-5)の定常状態における最大引張熱応力を、横軸に傾斜組成分布をとって示すと、図11のようになる。ただし、直線組成分布(2-3)と(1-2)は同一である。図11より、定常時に板表面に生じる最大引張熱応力は、直線分布からセラミックスリッチな分布にするほど、単調に緩和され、逆にセラミックプアな分布にするほど、単調に増大することがわかる。

6. 結 言

不均質平板の三次元熱応力解析の第一段階として、

板厚方向のみ温度分布と不均質性を有する不均質平板の非定常熱応力を Rogers と Spencer の手法より解析し、次の結論を得た。

(1) 不均質平板が加熱表面のごく近傍しか温度上昇をもたない加熱初期の熱応力分布は、傾斜組成分布の相違によらず、ほぼ同一である。

(2) 定常時に板表面に生じる最大引張熱応力は、対称加熱部分による対称熱応力にほとんど支配され、この最大引張熱応力は、板中央面に関して対称な板厚方向の不均質性(傾斜組成分布)をべき乗形の(2-1)のセラミックリッチに与えることより極端に緩和される。

なお、第二段階として、温度場に対する本解析法を拡張すれば、板内にも温度分布を有する三次元温度場による不均質平板の非定常熱応力が解析可能である。

文 献

- (1) 遠藤忠・滝沢博胤・島田昌彦, 第6回傾斜機能材料シンポジウム論文集, (1993-10), 175-179.
- (2) 神波誠治・鷹木洋・川端一也・山田秀章, 1994年度傾斜機能材料論文集, (1994), 201-206.
- (3) 西田勲夫, 熱電変換シンポジウム論文集, (1995-7), 36-37.
- (4) 西田勲夫, 傾斜機能材料研究会第25回ワークショップ資料, (1995-7), 41-56.
- (5) 川村昌志・ほか5名, 第6回FGMシンポジウム論文集, (1993-10), 93-97.
- (6) 宮本欽生・ほか5名, 第6回FGMシンポジウム論文集, (1993-10), 51-55; 康燕生・宮本欽生・村岡芳幸・山口修, 材料, 44-501(1995), 705-709.
- (7) Kassir, K., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, 98-3(1972), 456-470; 畑俊明, 機論, 51-467, A(1985), 1789-1794.
- (8) 平野徹・若島健司, 日本複合材料学会誌, 17-2(1991), 45-52; Hirano, T. and Wakashima, K., *MRS Bulletin*, (1995), 40-42.
- (9) Sugano, Y., *Ing. Arch.*, 57-2(1987), 147-156.
- (10) Vodicka, V., *Math. Nach.*, 14-1(1955), 47-51.
- (11) Rogers, T.G. and Spencer, A.J.M., *Int. J. Solids Struct.*, 25-12(1989), 1467-1482.
- (12) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd ed., (1987), 389-512, Martinus Nijhoff; Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V.F. and Sugano, Y., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 109-3(1993), 377-389.