

断続的な熱負荷を受ける傾斜機能平板の  
非定常温度分布と熱応力\*菅野良弘\*<sup>1</sup>, 佐藤恵一\*<sup>2</sup>, 須見尚文\*<sup>3</sup>Transient Temperature and Thermal Stresses in a Functionally  
Graded Plate Subjected to Intermittent Heating

Yoshihiro SUGANO, Keiichi SATO and Naobumi SUMI

Analytical solutions are presented for temperature and thermal stresses in a functionally graded plate subjected to intermittent heating on its surface. The nonhomogeneous thermal and elastic properties of the functionally graded plate are assumed to be symmetric with respect to the mid-plane. The transient temperature field is obtained from the solution for a transient heat conduction problem in the same functionally graded plate heated continually on its surface that is analyzed by Vodicka's method. Associated thermal stresses are analyzed based on Rogers and Spencer's solutions which are expressed in terms of the solution to the approximate, two dimensional, thin plate, governing equations for an equivalent homogeneous plate. Numerical calculations are carried out for the transient temperature and thermal stress distributions in PSZ/SUS 304/PSZ functionally graded plates subjected to intermittent heating on both plate surfaces.

**Key Words:** Thermal Stress, Nonhomogeneous, Functionally Graded Plate, Three Dimensional Solution, Intermittent Heating, Analytical Solution

## 1. 結 言

熱応力緩和型傾斜機能材料は、スペースプレーンの軽量超耐熱構造材料としてのみならず、高効率を発現させるための熱電変換材料<sup>(1)</sup>としてもその応用が考えられつつある。また、スペースプレーン用傾斜機能材料は、数十回程度繰返し使用されることを目標に開発が進められていることから種々の加熱方法にて繰返しパルス加熱を与えた場合の傾斜機能材料の特性についての実験結果<sup>(2)</sup>も公表されている。本研究では、このような繰返しパルス加熱される傾斜機能材料を模擬した解析モデルとして、板厚方向に板中央面に関して対称な不均質性をもつ傾斜機能平板が、その両表面に断続的な熱負荷を受ける場合の温度分布、三次元熱応力分布を、時間的に一定の熱負荷を受ける場合の解を利用して比較的容易に解析する手法を示す。また、解析結果をPSZ(部分安定化ジルコニア)とSUS 304(オーステナイト系ステンレス)からなる傾斜機能平板に応用し、数値計算結果から加熱時間と冷却時間の比や

傾斜組成分布が繰返しパルス加熱時の温度分布、熱応力分布に及ぼす影響を明らかにする。なお、このような板中央面に関して対称な不均質性をもつ傾斜機能材料は、川村ら<sup>(3)</sup>によって電気絶縁性が付与された核融合炉用両側対称傾斜機能材料として開発されている。また、宮本ら<sup>(4)</sup>によって、自己発熱反応法により創製されたAl<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/TiC/Niからなる両側対称傾斜した傾斜機能平板には、表面セラミック層の圧縮残留応力による強化やクラック伝ば方向の制御などの機能が付与できると指摘されている。

## 2. 温度解析

$z$ 軸を板厚方向とするデカルト座標系を図1のように板中央面に設定する。そして、この面に関して対称ではあるが、板厚方向に任意の不均質な熱的、弾性的特性が存在する初期温度零、板厚 $2h$ の傾斜機能平板について考察する。この平板が、ある時刻より、片側表面( $z=+h$ )に断続的な熱負荷(熱量 $Q_0$ と温度 $T_a$ の周囲媒体)を受け、背面( $z=-h$ )では温度零の周囲媒体と平板との間に熱伝達がある場合の非定常温度分布を解析する。

まず、板表面に時間に関して一定で、上述の板中央面に関して非対称な熱負荷を受ける傾斜機能平板の非

\* 1995年8月24日 材料力学部門講演会において講演、原稿受付 1995年10月24日。

<sup>1</sup> 正員、岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。

<sup>2</sup> 学生員、岩手大学大学院。

<sup>3</sup> 正員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷836)。

定常熱伝導問題の基礎式, 初期条件式および境界条件式は, 次式となる.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

$$T = 0, \quad t = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + h_2 (T - T_a H(t)) = Q_0 H(t), \quad z = +h \dots\dots\dots (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - h_2 T = 0, \quad z = -h \dots\dots\dots (4)$$

ただし,

$$\lambda(z) = \lambda(-z), \quad \rho(z) = \rho(-z), \quad c(z) = c(-z) \dots\dots\dots (5)$$

ここで,  $\lambda, \rho, c$  はそれぞれ熱伝導率, 密度, 比熱であり,  $h_2$  は板両表面における熱伝達率, また,  $H(\cdot)$  はヘビサイドの単位ステップ関数である. 上記の熱伝導問題の解  $T(z, t)$  を次式のように分離する.

$$T(z, t) = T_e(z, t) + T_o(z, t) \dots\dots\dots (6)$$

ここで,  $T_e(z, t), T_o(z, t)$  はそれぞれ次の基礎式系を満足する対称温度関数と反対称温度関数である.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda \frac{\partial T_e}{\partial z} \right\} &= \rho c \frac{\partial T_e}{\partial t} \\ T_e &= 0, \quad t = 0 \\ \lambda \frac{\partial T_e}{\partial z} + h_2 \left\{ T_e - \frac{T_a}{2} H(t) \right\} &= \frac{Q_0}{2} H(t), \quad z = +h \\ \lambda \frac{\partial T_e}{\partial z} - h_2 \left\{ T_e - \frac{T_a}{2} H(t) \right\} &= -\frac{Q_0}{2} H(t), \quad z = -h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda \frac{\partial T_o}{\partial z} \right\} &= \rho c \frac{\partial T_o}{\partial t} \\ T_o &= 0, \quad t = 0 \\ \lambda \frac{\partial T_o}{\partial z} + h_2 \left\{ T_o - \frac{T_a}{2} H(t) \right\} &= \frac{Q_0}{2} H(t), \quad z = +h \\ \lambda \frac{\partial T_o}{\partial z} - h_2 \left\{ T_o + \frac{T_a}{2} H(t) \right\} &= \frac{Q_0}{2} H(t), \quad z = -h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

次に, 上記の対称加熱問題と反対称加熱問題の解析対象領域として, 平板の  $z \geq 0$  なる領域のみ考慮するため, 後記の温度関数  $T_h(z, t)$  を導入する. ここで,  $z = 0$  の板中央面が対称加熱問題では断熱面, 反対称加熱問題では温度零となることを考慮すれば, 対称温度関数  $T_e(z, t)$  と反対称温度関数  $T_o(z, t)$  は次式のように表される.

$$T_e(z, t) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} T_h(z, t), \quad T_o(z, t) = \lim_{h_1 \rightarrow \infty} T_h(z, t) \dots\dots\dots (9)$$

ただし,  $h_1$  は板中央面の熱伝達率であり, 温度関数  $T_h(z, t)$  は次式の基礎式系を満足する.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda \frac{\partial T_h}{\partial z} \right\} &= \rho c \frac{\partial T_h}{\partial t} \\ T_h &= 0, \quad t = 0 \\ \lambda \frac{\partial T_h}{\partial z} + h_2 \left\{ T_h - \frac{T_a}{2} H(t) \right\} &= \frac{Q_0}{2} H(t), \quad z = +h \\ \lambda \frac{\partial T_h}{\partial z} - h_1 T_h &= 0, \quad z = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

したがって, 対称温度関数と反対称温度関数を求める問題は, 温度関数  $T_h(z, t)$  を求める問題に帰着された.

次に, この温度関数  $T_h(z, t)$  を求めるに際して, 板厚方向の任意の不均質性に対処するために, 傾斜機能平板を相異なる  $n$  個の均質層に分割し, 第  $i$  層と  $i + 1$  層の仮想界面において温度と熱量が連続することを考慮すれば, この第  $i$  層の温度関数  $T_{hi}(z, t)$  は, 複合領域に対する一種の積分変換法である Vodicka の手法<sup>(5)</sup> を適用し, 著者らの既報<sup>(6)(8)</sup> を参照して, 次式のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} T_{hi}(z, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(t) R_{im}(z) \cdot L_{i2}(z) P_2(t) \dots\dots\dots (11) \\ \phi_m(t) &= -c^{-\gamma_m t} \int_0^t e^{\gamma_m t'} l_{m2} \frac{dP_2}{dt'} dt' \\ R_{im}(z) &= A_{im} \cos(d_{im} z) + B_{im} \sin(d_{im} z) \\ L_{i2}(z) &= A_{i2}^* z + B_{i2}^* \\ P_2(t) &= -(T_a/2)H(t) + (Q_0/h_2)H(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$l_{m2}$  は調和関数  $L_{i2}(z)$  を固有関数  $R_{im}(z)$  で展開したときの展開係数であり, 次式の不連続な重み関数に対

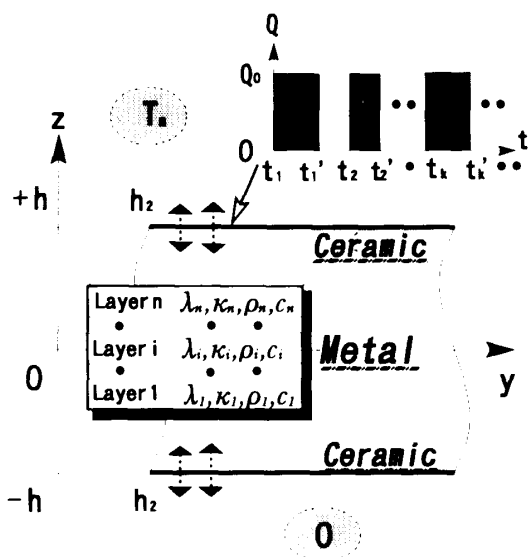


Fig. 1 Analysis Model

する直交関係を適用して求められる。

$$\sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\lambda_i}{\kappa_i} R_{im}(z) R_{im}(z) dz = \begin{cases} \text{const.} & (m = \mu) \\ 0 & (m \neq \mu) \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\kappa_i = \lambda_i / (\rho_i c_i)$  は温度伝導率であり、下添字  $i$  は第  $i$  層の諸量を意味する。また、固有値  $\gamma_m (= d_{im} \sqrt{\kappa_i})$  は、次式の超越方程式の第  $m$  番めの正根である。

$$G_n \cdot E_{n-1}^m \cdot E_{n-2}^m \cdot \dots \cdot E_2^m \cdot E_1^m \cdot a_1 = 0, \quad G_1 \cdot a_1 = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \begin{bmatrix} A_{im} \\ B_{im} \end{bmatrix} \\ G_1 &= [-h_1 \quad \lambda_1 d_{1m}], \quad G_n = [-\lambda_n d_{nm} \sin(d_{nm} z_n) + h_2 \cos(d_{nm} z_n) \quad \lambda_n d_{nm} \cos(d_{nm} z_n) + h_2 \sin(d_{nm} z_n)] \\ E_i^m &= \begin{bmatrix} X_{im} \cos(\alpha_{im} z_i) + Y_{im} \cos(\beta_{im} z_i) & X_{im} \sin(\alpha_{im} z_i) - Y_{im} \sin(\beta_{im} z_i) \\ X_{im} \sin(\alpha_{im} z_i) + Y_{im} \sin(\beta_{im} z_i) & -X_{im} \cos(\alpha_{im} z_i) + Y_{im} \cos(\beta_{im} z_i) \end{bmatrix} \\ X_{im} &= (1 - \varepsilon_{im;i+1m})/2, \quad Y_{im} = (1 + \varepsilon_{im;i+1m})/2, \quad \alpha_{im} = d_{i+1m} + d_{im}, \\ \beta_{im} &= d_{i+1m} - d_{im}, \quad \varepsilon_{im;i+1m} = \frac{\lambda_i d_{im}}{\lambda_{i+1} d_{i+1m}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

さらに、固有関数  $R_{im}(z)$  と調和関数  $L_{i2}(z)$  に含まれる未知係数  $A_{im}, B_{im}, A_{i2}^*, B_{i2}^*$  は次式より決定される。

$$a_i = E_{i-1}^m \cdot E_{i-2}^m \cdot \dots \cdot E_2^m \cdot E_1^m \cdot a_1 \dots\dots\dots (16)$$

$$a_i^* = E_{i-1}^* \cdot a_1^* \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i^* &= \begin{bmatrix} A_{i2}^* \\ B_{i2}^* \end{bmatrix}, \quad E_i^* = \begin{bmatrix} \lambda_{i;i+1} & 0 \\ \sum_{k=1}^i (\lambda_{i;k} - \lambda_{i;k+1}) z_k & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_{i;i} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i} \\ A_{i2}^* &= h_1 h_2 / \Omega, \quad B_{i2}^* = \lambda_i h_2 / \Omega \\ \Omega &= \lambda_i (h_1 + h_2) + h_1 h_2 \left\{ \lambda_{i;n} z_n + \sum_{k=1}^n (\lambda_{i;k} - \lambda_{i;k+1}) z_k \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

したがって、第  $i$  層の温度関数  $T_{hi}(z, t)$  を式(9)に代入し、それぞれ  $h_1 \rightarrow 0, h_1 \rightarrow \infty$  の極限值をとることにより、時間に関して一定な熱負荷を受ける第  $i$  層の対称温度関数  $T_e(z, t)$  と反対称温度関数  $T_o(z, t)$  が得られる。

次に、この第  $i$  層における温度関数  $T_{hi}(z, t)$  を利用して、板表面 ( $z=h$ ) に断続的な熱負荷を受ける場合の温度分布を次式のように得る。

まず、図1を参照して、第1回めの熱負荷期間  $t_1 \sim t_1'$  における温度関数  $\widehat{T}_{hi1}^C(z, t)$  は、次式で得られる。

$$\widehat{T}_{hi1}^C(z, t) = T_{hi}(z, t), \quad t = t_1 \sim t_1' \quad (t_1 = 0) \dots\dots\dots (19)$$

次に、第1回めの熱負荷後の冷却期間  $t_1' \sim t_2$  における温度関数  $\widehat{T}_{hi1}^C(z, t)$  は、次式の基礎式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{T}_{hi1}^C}{\partial z^2} &= \frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial \widehat{T}_{hi1}^C}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \widehat{T}_{hi1}^C &= \widehat{T}_{hi1}^H(z, t), \quad t = t_1' \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \lambda_n \frac{\partial \widehat{T}_{hi1}^C}{\partial z} + h_2 \widehat{T}_{hi1}^C &= 0, \quad z = z_n \quad (z_n = h) \\ \lambda_1 \frac{\partial \widehat{T}_{hi1}^C}{\partial z} - h_1 \widehat{T}_{hi1}^C &= 0, \quad z = z_0 \quad (z_0 = 0) \\ \widehat{T}_{hi1}^C &= \widehat{T}_{hi1}^C, \quad z = z_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ \lambda_i \frac{\partial \widehat{T}_{hi1}^C}{\partial z} &= \lambda_{i+1} \frac{\partial \widehat{T}_{hi1}^C}{\partial z}, \quad z = z_i \\ &(i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、温度関数  $T_{hi}(z, t)$  の上添字  $H, C$  はそれぞれ熱負荷期間、冷却期間の温度関数を表す。上記の第  $i$  層の第1回めの冷却期間における温度関数  $\widehat{T}_{hi1}^C(z, t)$  を、次式のように分離する。

$$\widehat{T}_{hi1}^C(z, t) = \widehat{T}_{hi1}^H(z, t) + \widehat{T}_{hi1}^O(z, t) \dots\dots\dots (21)$$

$\widehat{T}_{hi1}^H(z, t)$  と  $\widehat{T}_{hi1}^O(z, t)$  の満足すべき基礎式、 $z = z_0$  における境界条件式、仮想界面における連続条件式は、式(20)の温度関数  $\widehat{T}_{hi1}^C(z, t)$  の上添字  $C$  を(1)、(2)に置き換えることにより得られ、初期条件式と  $z = z_n$  における境界条件式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{T}_{hi1}^H &= \widehat{T}_{hi1}^H(z, t), \quad t = t_1' \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \lambda_n \frac{\partial \widehat{T}_{hi1}^H}{\partial z} + h_2 \left\{ \widehat{T}_{hi1}^H - \frac{T_a}{2} H(t) \right\} &= \frac{Q_0}{2} H(t) \\ &z = z_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{T}_{hi1}^O &= 0, \quad t = t_1' \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \lambda_n \frac{\partial \widehat{T}_{hi1}^O}{\partial z} + h_2 \left\{ \widehat{T}_{hi1}^O + \frac{T_a}{2} H(t) \right\} &= -\frac{Q_0}{2} H(t) \\ &z = z_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

上式(22), (23)より,  $\widehat{T}_{hi1}(z, t)$  と  $\widehat{T}_{hi2}(z, t)$  は, それぞれ初期温度が  $\widehat{T}_{hi1}(z, t_i)$  で, 板表面( $z=z_n$ )に  $Q_0/2$  なる熱負荷を受け,  $T_a/2$  なる温度の周囲媒体によって加熱される場合の温度関数  $T_{hi}(z, t)$  と, 時刻  $t=t_i$  で初期温度零で, 板表面( $z=z_n$ )に  $-Q_0/2$  なる熱吸収があり,  $-T_a/2$  なる温度の周囲媒体によって冷却される場合の温度関数  $-T_{hi}(z, t-t_i)$  となるため, 式(21)の第1回めの冷却期間における温度関数  $\widehat{T}_{hi1}(z, t)$  は, 次式となる,

$$\widehat{T}_{hi1}^c(z, t) = T_{hi}(z, t) - T_{hi}(z, t-t_i), \quad t=t_i \sim t_2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

さらに, 第2回めの熱負荷期間  $t_2 \sim t_2'$  における温度関数  $\widehat{T}_{hi2}(z, t)$  は次式で表される,

$$\widehat{T}_{hi2}^h(z, t) = T_{hi}(z, t) - T_{hi}(z, t-t_i) + T_{hi}(z, t-t_2), \quad t=t_2 \sim t_2' \quad \dots\dots\dots (25)$$

一般に, 第  $k$  回めの熱負荷期間  $t_k \sim t_k'$  における第  $i$  層の温度関数  $\widehat{T}_{hik}^h(z, t)$  は次式となり,

$$\widehat{T}_{hik}^h(z, t) = \sum_{l=1}^k T_{hi}(z, t-t_l) - \sum_{l=1}^{k-1} T_{hi}(z, t-t_l'), \quad t=t_k \sim t_k' \quad \dots\dots\dots (26)$$

第  $k$  回めの冷却期間  $t_k' \sim t_{k+1}$  における温度関数  $\widehat{T}_{hik}^c(z, t)$  は次式となる,

$$\widehat{T}_{hik}^c(z, t) = \sum_{l=1}^k \{ T_{hi}(z, t-t_l) - T_{hi}(z, t-t_l') \}, \quad t=t_k' \sim t_{k+1} \quad \dots\dots\dots (27)$$

したがって, 式(11)で与えられる時間に関して一定な熱負荷を受ける第  $i$  層の温度関数  $T_{hi}(z, t)$  さえ求まれば, 式(1)~(4)の解である板表面( $z=h$ )に非軸対称な熱負荷を受ける場合の第  $i$  層における温度関数  $T_i(z, t)$  は, 式(9)より得られる対称温度関数  $T_{ei}(z, t)$  と反対称温度関数  $T_{oi}(z, t)$  の和として求められ, さらに, 式(26), (27)より板表面( $z=z_n$ )に断続的な熱負荷を受ける場合の温度関数が容易に求められる。

なお, 熱負荷期間ごとに板表面( $z=z_n$ )に負荷される熱量が異なる場合は, 各熱負荷ごとに式(11)の温度関数  $T_{hi}(z, t)$  に含まれる  $Q_0$  を単に第  $k$  回めの熱量  $Q_k$  に置き換えればよいため, 任意の熱量が与えられた場合も同様に解析可能である。

### 3. 三次元熱応力解析

上記の断続的な繰返し熱負荷を受ける傾斜機能平板の三次元熱応力分布を, 板内で  $\sigma_{zz}=0$  が仮定できるものとして, Rogers と Spencer の手法<sup>7)</sup>により相当均質板の薄板理論の解を用いて解析する。Rogers と Spencer の手法による三次元熱応力解析の詳細は文献

(7), (8)に記載されているため, ここでは, 概略のみ記述する。

まず, 対称温度関数  $T_e(z, t)$  による熱変位成分は, 次式のように表現できる,

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \bar{u}(x, y) + F(z)\bar{\Delta}_{,x} \\ v(x, y, z) &= \bar{v}(x, y) + F(z)\bar{\Delta}_{,y} \\ w(x, y, z) &= G(z)\bar{\Delta} + K(z, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここで,  $\bar{\Delta} = \bar{u}_{,x} + \bar{v}_{,y}$  であり, 未知関数  $F(z)$  は  $z$  の偶関数,  $G(z), K(z, t)$  は  $z$  の奇関数である。また,  $\bar{u}, \bar{v}$  はラーメの定数  $\bar{\lambda}_c, \bar{\mu}$  をもつ相当均質板の薄板理論の解から得られ, 次式の二次元重調和方程式を満足する,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \bar{u} &= 0, \quad \nabla^4 \bar{v} = 0 \\ (\bar{\lambda}_c, \bar{\mu}) &= (1/h) \int_0^h (\lambda_c, \mu) dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ただし,  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  である。

式(28)の熱変位成分を不均質板における変位表示のフックの法則に代入し, 応力の釣合い式と次の板両表面の外力フリー境界条件式(30)を考慮すれば未知関数  $F(z), G(z), K(z, t)$  が決定され, 熱応力成分式(31)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} &= 0, \quad z = \pm h \quad \dots\dots\dots (30) \\ \sigma_{xx} &= l u_{,x} + (l - 2\mu) \bar{v}_{,y} + 2\mu F \bar{\Delta}_{,xx} - \beta^* T_e \\ \sigma_{yy} &= (1 - 2\mu) \bar{u}_{,x} + l \bar{v}_{,y} + 2\mu F \bar{\Delta}_{,yy} - \beta^* T_e \\ \sigma_{zz} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= \mu (\bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x}) + 2\mu F \bar{\Delta}_{,xy} \\ \sigma_{xz} &= \{ \bar{l} M_0(z) / \bar{\mu} - L_0(z) \} \bar{\Delta}_{,x} \\ \sigma_{yz} &= \{ \bar{l} M_0(z) / \bar{\mu} - L_0(z) \} \bar{\Delta}_{,y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \bar{l} &= (1/h) \int_0^h l dz, \quad l = 2\mu(\eta + 1) \\ \eta &= \lambda_c / (\lambda_c + 2\mu) \\ F(z) &= \int_0^z [ -G(s) + \{ (\bar{l} / \bar{\mu}) M_0(s) - L_0(s) \} / \mu(s) ] ds + k_0 \\ G(z) &= - \int_0^z \eta(s) ds \\ K(z, t) &= \int_0^z \gamma(s) T_e(s, t) ds \\ \gamma &= \beta / (\lambda_c + 2\mu) \\ M_0(z) &= \int_0^z \mu(s) ds, \quad L_0(z) = \int_0^z l(s) ds \\ \beta &= \alpha(3\lambda_c + 2\mu), \quad \beta^* = E(z)\alpha(z) / \{ 1 - \nu(z) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただし,  $E, \alpha, \nu$  はそれぞれヤング率, 線膨張係数, ポアソン比である。  $F(z)$  に含まれる定数  $k_0$  は板の端部

における境界条件により、次式によって決定される。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^h F(z) dz = 0 \quad (\text{変位指定の場合}) \\ \int_0^h \mu(z) F(z) dz = 0 \quad (\text{外力指定の場合}) \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

次に、反対称温度関数  $T_o(z, t)$  による熱変位成分は、純曲げ問題の解として次式のように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \{A(z)\bar{w}(x, y) + B(z)\nabla^2 \bar{w}(x, y)\}_{,x} \\ v(x, y, z) &= \{A(z)\bar{w}(x, y) + B(z)\nabla^2 \bar{w}(x, y)\}_{,y} \\ w(x, y, z) &= \bar{w}(x, y) + C(z)\nabla^2 \bar{w}(x, y) + D(z) \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

ここで、関数  $\bar{w}(x, y)$  はラーメンの定数  $\bar{\lambda}_c, \bar{\mu}$  をもつ、相当均質板のたわみであり、次式の二次元重調和方程式を満足する。

Table 1 Material Properties of PSZ and SUS304

	PSZ	SUS304
Thermal Conductivity $\lambda$ (W/m·K)	1.67	15.97
Young's Modulus E (GPa)	211	193
Coefficient of Linear Thermal Expansion $\alpha$ ( $\times 10^{-6}$ 1/K)	2.93	14.87
Density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	5730	7930
Specific Heat c (kJ/kg·K)	0.467	0.361

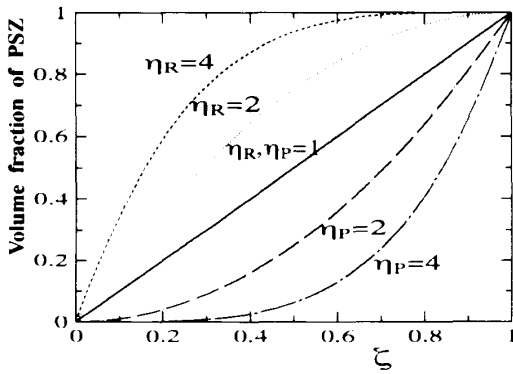


Fig. 2 Compositional distribution of PSZ

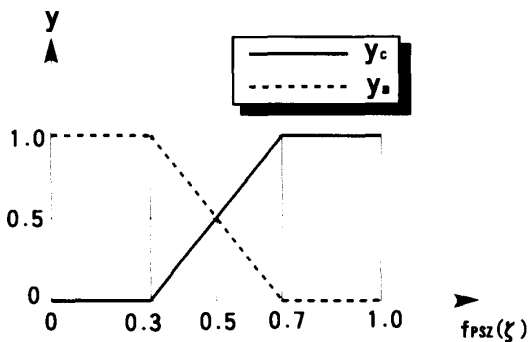
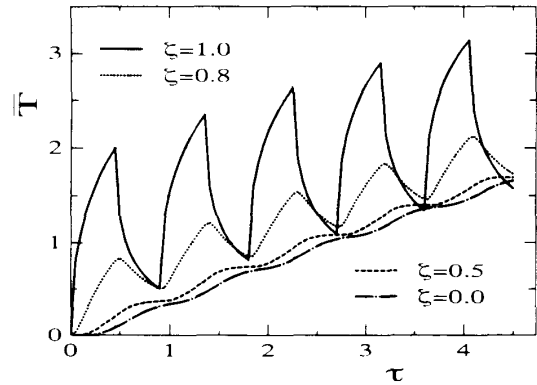


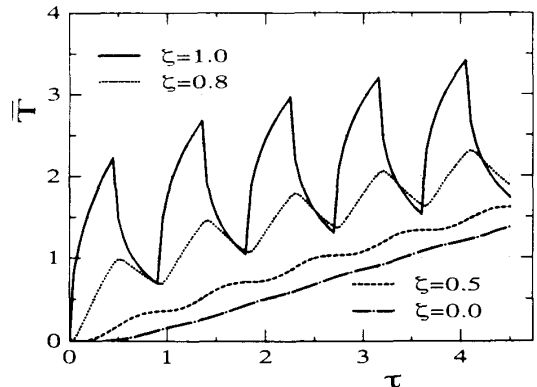
Fig. 3 Membership function

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \bar{w}(x, y) &= 0 \\ (\bar{\lambda}_c, \bar{\mu}) &= (3/2h^3) \int_{-h}^h \{\lambda_c(z), \mu(z)\} z^2 dz \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

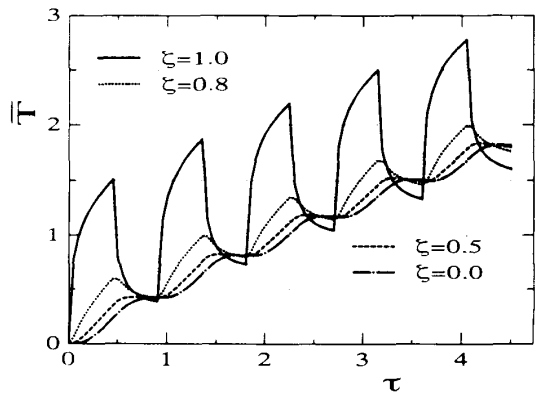
前述の対称温度場による熱応力解析と同様にして、熱応力成分式は次式のように得られる。



(a) Linear composition ( $\eta_R, \eta_P = 1$ )



(b) Ceramic rich composition ( $\eta_R = 4$ )



(c) Ceramic poor composition ( $\eta_R = 4$ )

Fig. 4 Temperature histories for different compositional distributions ( $\beta_2 = 1.0, \tau_H = 0.45, \tau_c = 0.45$ )

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -z\{l\bar{w}_{,xx} + (l-2\mu)\bar{w}_{,yy}\} \\
 &\quad + 2\mu B\nabla^2\bar{w} - \beta^*T_o \\
 \sigma_{yy} &= -z\{(l-2\mu)\bar{w}_{,xx} + l\bar{w}_{,yy}\} \\
 &\quad + 2\mu B\nabla^2\bar{w} - \beta^*T_o \\
 \sigma_{zz} &= 0 \\
 \sigma_{xy} &= 2\mu l(-z\bar{w} + B\nabla^2\bar{w})_{,xy} \\
 \sigma_{xz} &= \{L_1(z) - L_1(h)\}(\nabla^2\bar{w})_{,x} \\
 \sigma_{yz} &= \{L_1(z) - L_1(h)\}(\nabla^2\bar{w})_{,y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned}
 B(z) &= -\int_0^z sl(s)R_0(s)ds + \{L_1(z) \\
 &\quad - L_1(h)\}R_0(z) + N_2(z) - \{N_1(z) + k_1\}z \\
 D(z) &= \int_0^z \gamma(s)T_o(s,t)ds + k_2 \\
 R_0(z) &= \int_0^z 1/\mu(s)ds, \quad L_1(z) = \int_0^z sl(s)ds \\
 N_1(z) &= \int_0^z s\eta(s)ds, \quad N_2(z) = \int_0^z s^2\eta(s)ds
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

ただし、式(37)の  $B(z)$ ,  $D(z)$  の定数  $k_1, k_2$  は、端部の境界条件より決定される。

4. 数値計算例と考察

数値計算例として、端部を自由端とする縦横  $2a \times 2b$ 、板厚  $2h$  の対称形傾斜機能平板を取り扱う。そして、この平板の両表面に、板中央面に関して対称で、熱負荷期間  $t_H$ 、冷却期間  $t_c$  の断続的な熱負荷(熱量  $Q_0$  と温度  $T_a$  なる周囲媒体)を受け、平板の両表面には熱伝達(熱伝達率  $h_2$ )がある場合の非定常温度分布と熱応力分布を考察する。

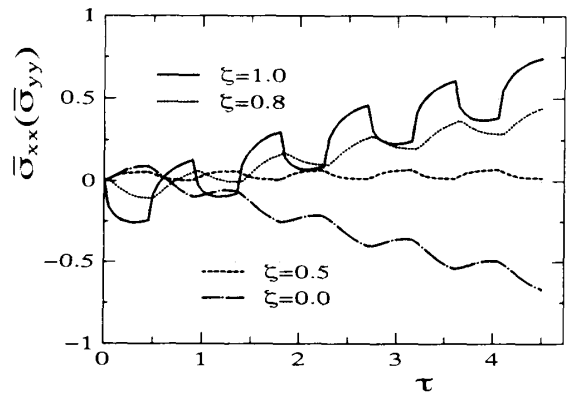
今、解析対象は端部を自由端とし、板両表面が板中央面に対して対称加熱されるため、ポアソン比  $\nu = \text{const.}$  とすれば熱応力成分式(31)、(36)における  $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$  に含まれる未知係数が次式(38)により決定されるため、熱応力成分式(40)が得られる<sup>(8)</sup>。

$$\left. \begin{aligned}
 N_{xx} &= 0, \quad N_{xy} = 0, \quad x = \pm a \\
 N_{yy} &= 0, \quad N_{xy} = 0, \quad y = \pm b
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

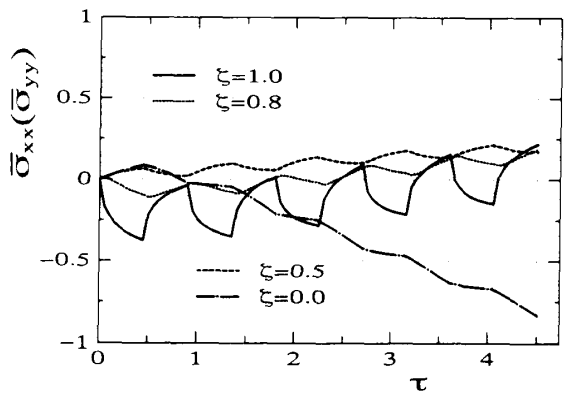
ここで、

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} \dots) = \int_{-h}^h (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \dots) dz \dots\dots\dots (39)$$

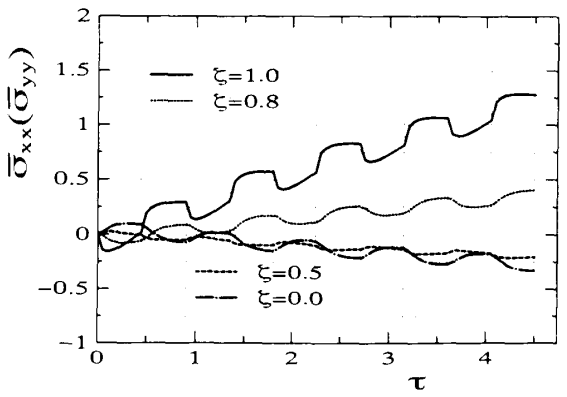
$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{h\widehat{T}_e^*}{I_1(h)} E(z) - \frac{\alpha(z)E(z)}{1-\nu} T_e(z,t) \\
 \sigma_{xy} &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$



(a) Linear composition ( $\eta_R, \eta_P=1$ )



(b) Ceramic rich composition ( $\eta_R=4$ )



(c) Ceramic poor composition ( $\eta_P=4$ )

Fig. 5 Thermal stress histories for different compositional distributions ( $\beta_2=1.0, \tau_H=0.45, \tau_c=0.45$ )

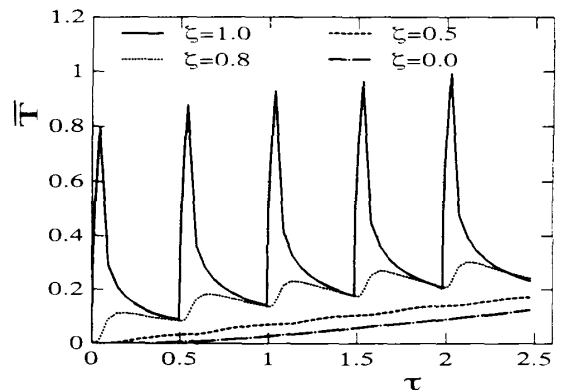


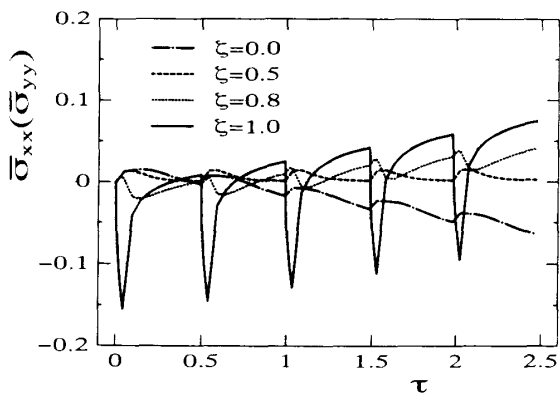
Fig. 6 Temperature histories for linear composition ( $\beta_2=1.0, \tau_H=0.045, \tau_c=0.45$ )

ただし、

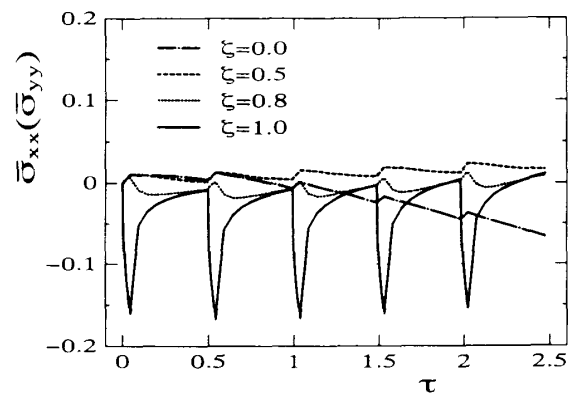
$$I_1(z) = \int_0^z E(s) ds, \quad \bar{T}_e^* = (1/h) \int_0^h \beta^* T_e dz \quad \dots\dots\dots (41)$$

数値計算において、次式の無次元量を導入する、

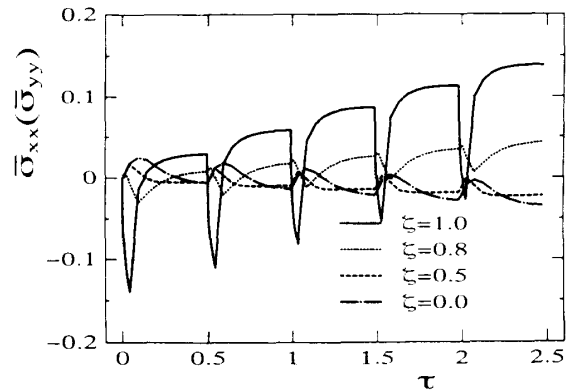
$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{\alpha_1 t}{h^2}, \quad \beta_2 = \frac{h_2 h}{\lambda_n}, \quad \bar{T} = \frac{T}{(T_a \bar{Q}_0)} \\ \bar{Q}_0 &= \frac{Q_0 h}{\lambda_1 T_0}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / \{E_1 a_1 T_a \bar{Q}_0 / (1-\nu)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (42)$$



(a) Linear composition ( $\eta_R, \eta_P = 1$ )



(b) Ceramic rich composition ( $\eta_R = 4$ )



(c) Ceramic poor composition ( $\eta_P = 4$ )

Fig. 7 Thermal stress histories for different compositional distributions ( $\beta_2 = 1.0, \tau_H = 0.045, \tau_C = 0.45$ )

ここで、 $\beta_2$  は Biot 数、 $Q_0$  は板表面に受ける単位時間、単位面積当たりの熱量であり、下添字 1 と  $n$  はそれぞれ第 1 層の板中央面と第  $n$  層の加熱表面における物性値を意味する。数値計算に使用した傾斜機能平板は、PSZ-SUS 304 PSZ 系対称形傾斜機能平板とし、PSZ (部分安定化ジルコニア) と SUS 304 (オーステナイト系ステンレス) の材料特性を表 1 に示す。

また、板厚方向の傾斜組成分布は、時間に関して一定な熱負荷を受ける場合に熱応力緩和効果が期待できた無次元板厚座標  $\xi$  のべき乗関数形とし、加熱側 PSZ の組成分布  $f_{psz}(\xi)$  をセラミックリッチとプアの場合に分けて、次式で定義した。

$$\left. \begin{aligned} f_{psz}(\xi) &= 1 - (1 - \xi)^{\eta_R} \quad (\text{Ceramic rich}) \\ f_{psz}(\xi) &= \xi^{\eta_P} \quad (\text{Ceramic poor}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (43)$$

ここで、 $\eta_R, \eta_P$  は組成分布パラメータであり、 $\eta_R, \eta_P = 1$  は線形分布を示す。N 個の各層における熱伝導率、ヤング率、線膨張係数は、母相に球状粒子を分散させた場合について Mori-Tanaka の理論<sup>(9)(10)</sup>を用い、また、密度、比熱は線形複合則を用いて算出した。さらに、母相と分散相の区別にあいまいさを含む中間相では、次式の Fuzzy 推論法<sup>(11)</sup>により各材料特性を算出した。

$$M(M_m, M_p, y_m, y_c) = (M_m y_c + M_p y_m) / (y_m + y_p) \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここで、 $M_m, M_p$  は熱伝導率、密度などの各材料特性について、それぞれ母相を PSZ、分散相を SUS 304 および母相を SUS 304、分散相を PSZ とした場合の Mori-Tanaka の理論、または線形複合則より算出された材料特性である。また、 $y_m, y_c$  はそれぞれ PSZ の体積分率によって決定される SUS 304, PSZ の適合度であり、ここでは図 3 のような中間相  $0.3 \leq f_{psz} \leq 0.7$  において線形分布となるメンバシップ関数を採用

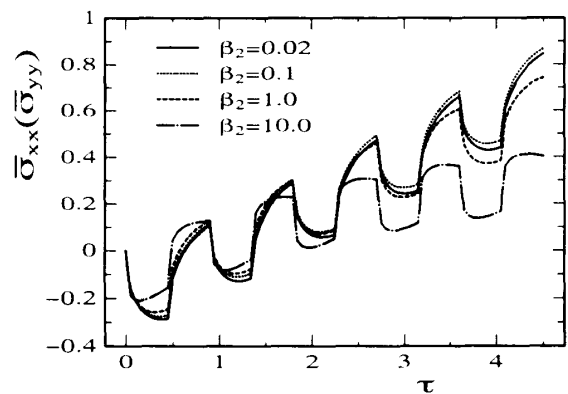
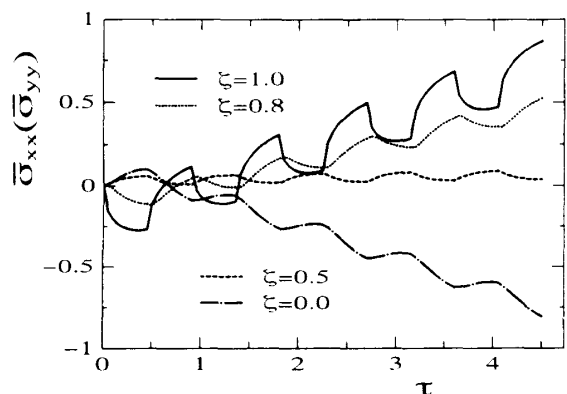
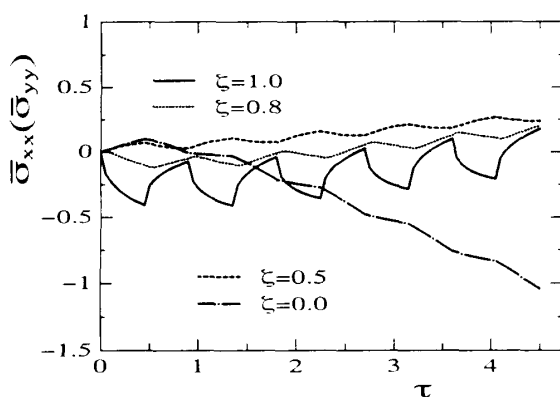
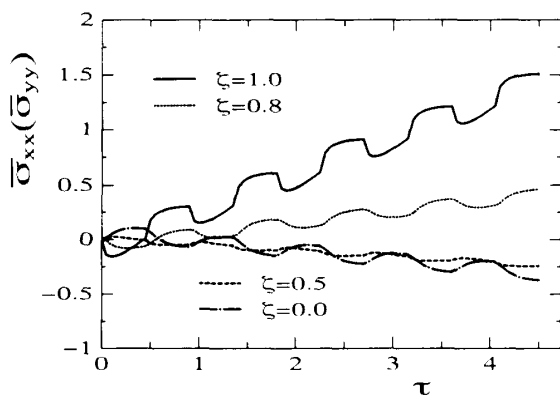


Fig. 8 Effect of Biot number  $\beta_2$  on thermal stresses for linear composition ( $\xi = 1.0, \tau_H = 0.45, \tau_C = 0.45$ )

(a) Linear composition ( $\eta_k, \eta_r = 1$ )(b) Ceramic rich composition ( $\eta_k = 4$ )(c) Ceramic poor composition ( $\eta_r = 4$ )Fig. 9 Thermal stress histories for different compositional distributions ( $\beta_2 = 0.1$ ,  $\tau_H = 0.45$ ,  $\tau_C = 0.45$ )

して各材料特性を算出した。なお、ポアソン比は一定値 0.3 とした。

図 4(a), (b), (c) は、 $\bar{Q}_0 = 1.0$ ,  $\beta_2 = 1.0$  とし、傾斜組成分布がそれぞれ線形、セラミックリッチ、セラミックプアである傾斜機能平板(以下 FGM 平板とする)について、熱負荷期間  $\tau_H = 0.45$ 、冷却期間  $\tau_C = 0.45$  (以下この条件を時間比 1:1 と記す)の熱サイクル負荷を与えた場合の非定常温度分布である。図 4(a), (b), (c) いずれの場合も板表面( $\zeta = 1$ )では加熱時に

温度が急激に上昇し、逆に加熱を中断した冷却時に急激に低下するが、板中央面( $\zeta = 0$ )では冷却期間においても温度が緩やかに上昇し続けている。図 4(a)では、4 回めの冷却期間末期において、SUS 304 100%の板中央面温度が PSZ 100%の加熱表面温度より高くなるが、図 4(b)では、6 回めの加熱開始時においても、加熱表面温度が板中央面温度より高いことがわかる。図 4(c)では、1 回めの冷却期間ですでにこの温度の逆転現象が見られる。

次に、図 5(a), (b), (c) は、図 4(a), (b), (c) の温度分布により生じる熱応力分布( $\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy}$ )である。図 5(a), (b), (c) より、FGM 平板の熱応力分布は傾斜組成分布に依存するが、一般に、時間経過に伴う平板内部への熱の拡散により、加熱表面の熱応力分布は圧縮熱応力から引張熱応力へ遷移し、逆に板中央面では引張熱応力から圧縮熱応力へ遷移する傾向にある。この加熱表面の熱応力分布は、図 5(c)のセラミックプアや図 5(a)の線形分布の場合、1, 2 回めの加熱後にすでに引張熱応力へ遷移し、以後、熱サイクル数の増加とともに急速に大きな引張熱応力を示す。それに対し、図 5(b)のセラミックリッチにおける加熱表面の熱応力分布は、5 回めの冷却期間においても圧縮熱応力から引張熱応力へ遷移過程にあり、板内部の  $\zeta = 0.5$  や  $\zeta = 0.8$  での引張熱応力に近い値を示している。したがって、PSZ 100%の加熱表面の引張熱応力の緩和に着目すれば、加熱・冷却の熱サイクル負荷を受ける場合も、時間的に一樣な熱負荷を受ける場合<sup>(4)</sup>と同様に、セラミックリッチな傾斜組成分布が有利であるといえる。

次に、図 6 に、傾斜組成分布がセラミックリッチである FGM 平板が  $\tau_H = 0.045$ ,  $\tau_C = 0.45$  なる熱サイクル負荷(以後時間比 1:10 という)を受ける場合の温度分布を示す。ただし、 $\bar{Q}_0 = 1.0$ ,  $\beta_2 = 1.0$  である。図 4(b)の時間比 1:1 の場合と比較すると、熱負荷期間中に加熱表面のみが急激な温度上昇を示し、この加熱表面を除いた板の内部の温度はあまり上昇せず、熱サイクル数の増加による板表面の最高温度の上昇も小さい。この傾向は、線形やセラミックプアな材料組成分布をもつ FGM 平板の温度分布についても同一である。また、板表面の温度と板内部の温度の大小関係については、図 6 は図 4(b)と同様である。

次に、図 7(a), (b), (c) は、図 6 と同一の熱サイクル負荷を受ける場合の(a)線形、(b)セラミックリッチ、(c)セラミックプアな傾斜組成分布をもつ FGM 平板の熱応力分布を示す。図 5(a), (b), (c) と比較すると、図 7(a), (b), (c) いずれの場合も板



全体に生じる熱応力は小さい。図7(c)は、熱サイクル数の増加に伴う板表面の圧縮熱応力から引張熱応力への遷移が非常に速く、かつ大きな引張熱応力を示す傾向にあるが、図7(b)では、この引張熱応力への遷移が非常に緩やかであることがわかる。このことは、熱負荷期間  $t_h$  に対し、冷却期間  $t_c$  が大きい場合は、傾斜組成分布をセラミックリッチにすることによる加熱表面に生じる引張熱応力の緩和効果がより顕著に現れることを示唆している。

次に、図8は、時間比1:1の熱サイクル負荷を受ける、線形な傾斜組成分布をもつFGM平板の板表面の熱応力を、ピオ数  $\beta_2$  をパラメータとして示したものである。図8より、熱サイクル数の増加とともに生じる板表面の引張熱応力は、板表面のピオ数  $\beta_2$  が0.02, 0.1など比較的断熱状態に近い場合に大きくなる。そこで、次に、図8と同様の熱サイクル負荷を受ける線形、セラミックリッチ、セラミックプアな傾斜組成分布をもつFGM平板の熱応力分布を  $\beta_2=0.1$  の場合のみ無次元板厚座標  $\xi$  をパラメータとしてそれぞれ図9(a), (b), (c)に示す。

まず、図9(a)を図5(a)(ただし、 $\beta_2=1.0$ )と比較すると、図9(a)のほうが、熱サイクル数の増加とともに板表面でより大きな引張熱応力、板中央面でより大きな圧縮熱応力を示す。しかし、図9(b)のセラミックリッチの場合、図5(b)と比較すると、熱サイクル数の増加とともに板表面の引張熱応力はわずかに小さくなるが、板内部の  $\xi=0.5$  での引張熱応力や、板中央面の圧縮熱応力は逆に少し大きくなる。したがって、FGM平板表面における引張熱応力の大小関係から判断すると、セラミックリッチな傾斜組成分布の場合は、線形分布の場合とは異なり、図5(b)の  $\beta_2=1.0$  の場合より  $\beta_2=0.1$  の場合のほうが安全であるといえる。

## 5. 結 言

時間に関して一定な熱負荷を受けるFGM平板の温

度解から、任意の熱負荷期間、冷却期間をもつ熱サイクル負荷を受ける場合の温度解を解の重ね合わせだけにより容易に導出できることを示した。また、導出された熱サイクル負荷を受けるFGM平板の温度解、熱応力解を用いて、PSZ/SUS 304系傾斜機能材料が、この板の上下面に板中央面に関して対称な熱サイクル負荷を受ける場合について数値計算を行い、以下の結論を得た。

熱負荷期間と冷却期間の時間比1:1, 1:10いずれの場合も、FGM平板の板厚方向の傾斜組成分布を、セラミックプアな分布や線形分布にするよりセラミックリッチな分布にしたほうが、熱サイクル数の増加に伴い冷却期間中に加熱表面温度が平板内部の温度より低くなる現象が遅く現れる。そして、その冷却期間中にセラミック100%の加熱表面に生じる最大引張熱応力が極端に緩和される。

## 文 献

- (1) 寺木潤一・平野徹, 計算力学講演会講演論文集, (1994), 35-36.
- (2) 西田俊夫・ほか6名, 第6回FGMシンポジウム論文集, (1993-10), 13-18; Teraki, J., Hirano, T. and Wakashima, K., *Functionally Gradient Materials, Ceramic Transactions*, **34**(1993), 67-82.
- (3) 川村昌志・ほか5名, 第6回FGMシンポジウム論文集, (1993-10), 93-97.
- (4) 宮本欽生・ほか5名, 第6回FGMシンポジウム論文集, (1993-10), 51-55.
- (5) Vodicka, V., *Math. Nachr.*, **14**-1(1955), 47-51.
- (6) 菅野良弘・森下博之・田中喜久昭, 機論, **59**-567, A(1993), 2666-2673.
- (7) Rogers, T.G. and Spencer, A.J.M., *Int. J. Solids Struct.*, **25**-12(1989), 1467-1482.
- (8) 菅野良弘・佐藤恵一・木村範貴・須見高文, 機論, **62**-595, A(1996), 728-736.
- (9) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd ed., (1987), 1, Martinus Nijhoff.
- (10) Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V. F. and Sugano, Y., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **109**-3(1993), 377-389.
- (11) 菅野道夫, ファジィ制御, (1989), 67, 日刊工業新聞社.