

熱伝達率の任意な変化を考慮した円板の 非定常温度と熱応力の解析解*

菅野良弘^{*1}, 千葉良一^{*2}, 廣瀬宏一^{*1}

Analytical Solutions of Transient Temperature and Thermal Stress in a Circular Plate with Arbitrary Variation of Heat-Transfer Coefficient

Yoshihiro SUGANO^{*3}, Ryoichi CHIBA and Koichi HIROSE^{*3}Iwate University, Dept. of Mechanical Engineering, 4-3-5 Ueda, Morioka, Iwate, 020-8551 Japan

The purpose of this paper is to present analytical methods of determining the transient temperature and in-plane thermal stress in a thin finite circular plate heated by the surrounding medium at the outer lateral surface and allowing arbitrary variations of heat-transfer coefficient along the radial position on the upper and lower surfaces of the plate. The transient temperature field is analyzed by modified Vodicka's method for one-dimensional boundary value problems in composite regions, and the associated in-plane thermal stresses are determined taking the temperature dependency of Young's modulus and the coefficient of linear thermal expansion into consideration.

Key Words: Thermoelasticity, Variable Heat-Transfer Coefficient, Temperature, Thermal Stress, Temperature-Dependent Mechanical Properties, Circular Plate, Analytical Solution

1. 緒 言

熱的環境下にある種々の平板、円筒、円板などの表面における熱伝達率は、周囲媒体の運動や、物体の形状、物体表面の凹凸を含む性状などに大きく依存し、表面上において場所とともに変化するのが現実である。廣瀬らは^①、回転円板上の熱伝達率が回転数の変化とともに3つのパターンをとることを数値解析と実験から報告している。局所加熱を受ける回転円板の温度場や熱応力場は、大型ディスクブレーキの熱座屈^②、木材の切断に用いる丸鋸の腰入れ^③、研削^④や旋盤による端面切削などと密接に関連して、厳密な解析が必要とされている。長方形板上の一方向の熱伝達率が特定の変化を示す場合の非定常熱伝導問題の厳密解が菅野^⑤によって報告され、この問題の半数値解析法がChen^⑥によって報告されているが、一般的な熱伝達率の場所による変化を考慮できる非定常熱伝導問題の解析解はほとんど報告されておらず、表面上の熱伝達率を一定または断熱とした解析例があるのみである。菅野の解析結果^⑤から、熱伝達率の場所による変化は非定常温度分布・熱応力分布に顕著な影響をもたらす、実際の設計において重要であることが指摘されている。本研究では、薄い円板の両表面の熱伝達率が半径方向に任意の変化をする非定常熱伝導問題

の近似解析解を導出する手法を提案し、また熱応力問題においてヤング率、線膨張係数の温度依存性を考慮した簡便な解析解を導出する手法を示す。さらに近年、研削砥石などの工作機械の高速化^⑦が進み、回転円板の回転速度が大きくなるにつれ、遠心破壊^{⑧,⑨}に対する安全性が大きな関心事となっている。加熱を受ける回転円板に対する応力問題において、回転速度が大きくなると遠心力によって生じる応力が無視できなくなる。このことから、回転に伴う円板表面の熱伝達率の場所による変化を熱応力解析に考慮するに際して、円板の遠心力によって生じる応力も考慮した。

2. 非定常温度場の解析

円板の上下面の熱伝達率が半径方向に任意に変化する薄い円板の非定常温度場が満足すべき微分方程式は次式で表される。

$$\lambda \left(T_{,rr} + \frac{1}{r} T_{,r} \right) - \frac{h_u(r) + h_l(r)}{b} (T - T_\infty) = \rho c T_{,t} \cdots (1)$$

ここで、 $h_u(r)$ 、 $h_l(r)$ はそれぞれ円板の上下面の熱伝達率であり、 λ 、 ρ 、 c 、 b はそれぞれ円板の熱伝導率、密度、比熱、板厚である。また、円板の上下面に接する周囲媒体の温度を T_∞ とした。なお、 r は r に関する微分を示す。式(1)は変数係数の2階線形微分方程式であり、任意の $h_u(r)$ 、 $h_l(r)$ に関して解析解を得ることはほとんど不可能である。そこで、本研究では任意の $h_u(r)$ 、 $h_l(r)$ に対して近似解析解を導出する手法を提案する。この手法は、円板表面を熱伝達率が変化

* 原稿受付 2000年3月27日。

*¹ 正員、岩手大学工学部(☎020-8551 盛岡市上田4-3-5)。*² 准員、宮城工業高等専門学校(☎981-1239 名取市愛島塩手字野田山48)。

E-mail: sugano@iwate-u.ac.jp

する方向に沿って有限個の領域に分割し、連続的な熱伝達率の変化を個々の領域において相異なる一定の熱伝達率で近似することにより、一種の複合領域の熱伝導問題として解析する方法である。

まず図1のように内外半径 r_0, r_n の薄い円板の上下面を熱伝達率が変化する半径方向にそれぞれ n 等分割し、各領域における熱伝達率を相異なる一定値 h_{ui}, h_{li} ($i=1,2,\dots,n$) で近似する。円板の初期温度を T_∞ 、 $r=r_0, r_n$ の円板内外側面の周囲媒体温度を $\theta_{in}(t)$ 、 $\theta_{out}(t)$ とする。第 i 領域の温度関数を T_i とすると、 T_i の満足すべき非定常熱伝導問題は次のように定式化される。

$$\lambda \left(T_{i,r}^* + \frac{1}{r} T_{i,r}^* \right) - \frac{h_{ui} + h_{li}}{b} T_i^* = \rho c T_{i,t}^* \quad (i=1,2,\dots,n) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\lambda T_{1,r}^* - h_0 (T_1^* - \theta_{in}^*(t)) = 0 \quad (r=r_0) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\lambda T_{n,r}^* + h_n (T_n^* - \theta_{out}^*(t)) = 0 \quad (r=r_n) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$T_i^* = T_{i+1}^*, \quad T_{i,r}^* = T_{i+1,r}^* \quad (r=r_i) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$T_i^* = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (t=0) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、

$$T_i^* = T_i - T_\infty, \quad \theta_{in}^*(t) = \theta_{in}(t) - T_\infty, \quad \theta_{out}^*(t) = \theta_{out}(t) - T_\infty$$

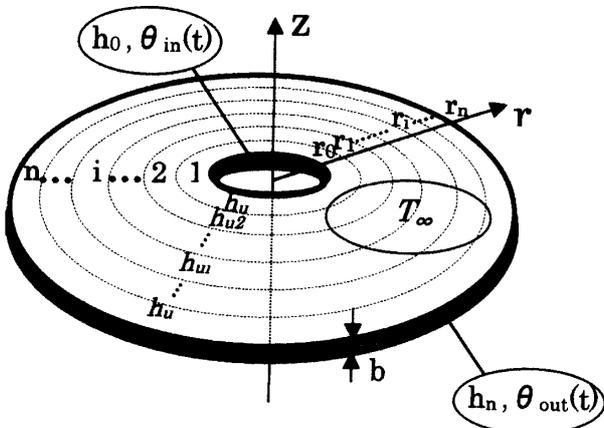


Fig.1 Analysis Model for a Circular Plate with Arbitrarily Variable Heat Transfer Coefficient

傾斜機能平板の非定常温度解⁽¹⁰⁾と同様、上記の1次元非定常熱伝導問題の解を次のように分離する。

$$T_i^*(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) X_{im}(r) + \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) P_j(t) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし

$$P_1(t) = -\theta_{in}^*(t), \quad P_2(t) = \theta_{out}^*(t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、 $L_{ij}(r)$ は次式の解である。

$$L_{ij,rr} + \frac{1}{r} L_{ij,r} - \frac{B_{ui} + B_{li}}{r_n^2 \bar{b}} L_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 B_{ui}, B_{li} はビオ一数であり、 $B_{ui} = h_{ui} r_n / \lambda$ 、 $B_{li} = h_{li} r_n / \lambda$ 、また $\bar{b} = b / r_n$ である。

さらに、 $X_{im}(r)$ は次式の固有値問題の解である。

$$\left. \begin{aligned} X_{im}(r)_{,rr} + \frac{1}{r} X_{im}(r)_{,r} + \left(\frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{B_{ui} + B_{li}}{r_n^2 \bar{b}} \right) X_{im}(r) &= 0 \\ X_{1m,r} - H_0 X_{1m} &= 0 \quad (r=r_0) \\ X_{nm,r} + H_n X_{nm} &= 0 \quad (r=r_n) \\ X_{im} &= X_{(i+1)m}, \quad X_{im,r} = X_{(i+1)m,r} \quad (r=r_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $\kappa = \lambda / c\rho$ 、 $H_0 = h_0 / \lambda$ 、 $H_n = h_n / \lambda$ である。

$L_{ij}(r)$ 、 $X_{im}(r)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$L_{ij}(r) = C_{ij} I_0(g_i r) + D_{ij} K_0(g_i r) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$X_{im}(r) = A_{im} J_0(d_{im} r) + B_{im} Y_0(d_{im} r) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $I_0(\)$ 、 $K_0(\)$ はそれぞれ0次の第一種、第二種変形 Bessel 関数、また $J_0(\)$ 、 $Y_0(\)$ はそれぞれ0次の第一種、第二種 Bessel 関数である。

$$g_i = \sqrt{(B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 \bar{b}} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$d_{im} = \sqrt{\gamma_m^2 / \kappa - (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 \bar{b}}$$

式(12)は $\gamma_m^2 / \kappa \geq (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 \bar{b}$ の場合の解であり、 $\gamma_m^2 / \kappa \leq (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 \bar{b}$ の場合は次式で与えられる。

$$X_{im}(r) = A_{im} I_0(d_{im}^* r) + B_{im} K_0(d_{im}^* r) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $d_{im}^* = \sqrt{(B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 \bar{b} - \gamma_m^2 / \kappa}$

また、未知係数 A_{im}, B_{im} を次式のようにおく。

$$A_{im} = \overline{A_{im} A_{nm}}, \quad B_{im} = \overline{B_{im} A_{nm}}, \quad \overline{A_{nm}} = 1$$

このとき、 $\overline{A_{im}}, \overline{B_{im}}$ は式(10)から決定される。

式(7)を式(3)~(5)に代入し、式(8)~(10)を考慮すれば、 $L_{ij}(r)$ に関する次の条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_{11,r} - H_0 L_{11} &= H_0 \quad (r=r_0) \\ L_{n1,r} + H_n L_{n1} &= 0 \quad (r=r_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{i1} &= L_{(i+1)1}, \quad L_{i1,r} = L_{(i+1)1,r} \quad (r=r_i) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} L_{12,r} - H_0 L_{12} &= 0 \quad (r=r_0) \\ L_{n2,r} + H_n L_{n2} &= H_n \quad (r=r_n) \\ L_{i2} &= L_{(i+1)2}, \quad L_{i2,r} = L_{(i+1)2,r} \quad (r=r_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

固有値 γ_m は未知係数 A_{im}, B_{im} が0以外の解を持つための条件から決定され、次の超越方程式の正根として求められる。

$$G_{e1} \cdot E_{e1} \cdot E_{e2} \cdots E_{en-2} \cdot E_{en-1} \cdot a_{en} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_{en} &= \begin{bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{bmatrix}, \quad G_{e1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \end{bmatrix} \\ g_{11} &= -d_{1m} J_1(d_{1m} r_0) - H_0 J_0(d_{1m} r_0) \\ g_{21} &= -d_{1m} Y_1(d_{1m} r_0) - H_0 Y_0(d_{1m} r_0) \\ E_{ei} &= C_{ei}^{-1} \cdot D_{ei+1} \\ C_{ei} &= \begin{bmatrix} J_0(d_{im} r_i) & Y_0(d_{im} r_i) \\ -d_{im} J_1(d_{im} r_i) & -d_{im} Y_1(d_{im} r_i) \end{bmatrix} \\ D_{ei} &= \begin{bmatrix} J_0(d_{i+1m} r_i) & Y_0(d_{i+1m} r_i) \\ -d_{i+1m} J_1(d_{i+1m} r_i) & -d_{i+1m} Y_1(d_{i+1m} r_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式(7)は式(16)の無限個の正根について総和をとる。さて、式(10)の解である固有関数 $X_{im}(r)$ は、次式の直交関係を満足する。

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} r X_{im}(r) X_{ik}(r) dr = \begin{cases} const. & (m=k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases} \dots (18)$$

式(6),(7)より $t=0$ において次式のようにおく。

$$G_i(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(0) X_{im}(r) = - \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) P_j(0) \dots (19)$$

式(18)の直交関係により $G_i(r)$, $L_{ij}(r)$ は次式のように級数表示できる。

$$G_i(r) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m X_{im}(r), L_{ij}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} l_{mj} X_{im}(r) \dots (20)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} g_m &= M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r G_i(r) X_{im}(r) dr \\ l_{mj} &= M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r L_{ij}(r) X_{im}(r) dr \\ M_m &= \sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

式(7),(20)を式(2)に代入し、式(9),(10)を考慮すれば、 $\varphi_m(t)$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\varphi_m(t)_{,t} + \gamma_m^2 \varphi_m(t) = - \sum_{j=1}^2 l_{mj} P_j(t)_{,t} \dots (22)$$

さらに、式(19),(20)より

$$\varphi_m(0) = g_m \dots (23)$$

式(22),(23)の解 $\varphi_m(t)$ は次式のように得られる。

$$\varphi_m(t) = e^{-\gamma_m^2 t} \left(g_m - \int_0^t e^{\gamma_m^2 t'} \sum_{j=1}^2 l_{mj} \frac{dP_j(t')}{dt'} dt' \right) \dots (24)$$

以上、式(11)と式(12)を式(7)に代入すると所要の温度関数 $T_i^*(r,t)$ は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} T_i^*(r,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) A_{nm} \left\{ \overline{A_{im}} J_0(d_{im}r) + \overline{B_{im}} Y_0(d_{im}r) \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^2 \left\{ C_{ij} I_0(g_j r) + D_{ij} K_0(g_j r) \right\} P_j(t) \dots (25) \end{aligned}$$

ただし、 $\gamma_m^2 / \kappa \leq (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 \bar{b}$ の場合は式(12)の代わりに式(13)を使用し、また $P_j(t)$, $\varphi_m(t)$ はそれぞれ式(8),(24)に与えられている。

3. 非定常温度場を受ける回転円板の応力解析

ある一定の角速度で回転し、軸対称非定常温度場を受ける薄い中空円板の平面応力問題の近似解析解を、ヤング率、線膨張係数の温度依存性を考慮して比較的簡便に導出する手法を示す。この場合、所要の応力成分は次式のように 2 つの応力場の重ね合わせにより得られる。

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^1 + \sigma_{rr}^2, \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^1 + \sigma_{\theta\theta}^2 \dots (26)$$

ただし、 σ_{ij}^1 は熱応力、 σ_{ij}^2 は一定の角速度 ω で回転する円板の遠心力（物体力）による応力である。

まず、平面熱応力問題のフックの法則を半径方向変位 U_r^1 で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(U_{r,r}^1 + \nu^{-1} U_r^1 \right) - \frac{E}{1-\nu} \int_{T_0}^T \alpha(x) dx \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(r^{-1} U_r^1 + \nu U_{r,r}^1 \right) - \frac{E}{1-\nu} \int_{T_0}^T \alpha(x) dx \end{aligned} \right\} (27)$$

ただし、 $E = E(T)$, $\alpha = \alpha(T)$ はヤング率、線膨張係数であり、ポアソン比 ν は一定値と仮定した。

次に、中心軸のまわりに一定の角速度で回転する一様な厚さを持つ円板の平面応力問題について考える。

この場合のフックの法則を半径方向変位 U_r^2 で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(U_{r,r}^2 + \nu^{-1} U_r^2 \right) \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(r^{-1} U_r^2 + \nu U_{r,r}^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

式(27),(28)を平衡方程式に代入すると、半径方向変位 U_r^1 , U_r^2 の満足すべき微分方程式を次式のように得る。

$$\begin{aligned} &U_{r,rr} + f_1(r) r^{-1} U_{r,r} + g_1(r) r^{-2} U_r \\ &= \begin{cases} (1+\nu) \left\{ \frac{E_r}{E} \int_{T_0}^T \alpha(x) dx + \alpha T_r \right\}, & (U_r = U_r^1) \\ -\frac{w \omega^2 r}{Eg} (1-\nu^2), & (U_r = U_r^2) \end{cases} \end{aligned} (29)$$

ただし、 w , ω , g は比重量、角速度、重力加速度であり、

$$f_1(r) = r E_r / E + 1, g_1(r) = \nu r E_r / E - 1 \dots (30)$$

本論文に示す手法はヤング率の任意の温度依存性式に対して簡便に適用可能であるが、多種の金属材料におけるヤング率の温度依存性が次式のように指数関数で表示できることが報告(11),(12)されているので、これを採用する。

$$E(T) = E_0 e^{-A_0 T} \quad [GPa] \dots (31)$$

この場合、 U_r^1 , U_r^2 の満足すべき微分方程式(29)は次式となる。

$$\begin{aligned} &U_{r,rr} + f_1(r) r^{-1} U_{r,r} + g_1(r) r^{-2} U_r \\ &= \begin{cases} -(1+\nu) T_r \left\{ A_0 \int_{T_0}^T \alpha(x) dx - \alpha \right\}, & (U_r = U_r^1) \\ -\frac{w \omega^2 r}{Eg} (1-\nu^2), & (U_r = U_r^2) \end{cases} \end{aligned} (32)$$

ただし、

$$f_1(r) = -A_0 r T_r + 1, g_1(r) = -\nu A_0 r T_r - 1 \dots (33)$$

式(32)は変数係数 2 階線形微分方程式であるが、ベッセル関数などの特殊関数で表現された温度関数について厳密解を求めることは不可能である。そこで、温度解析と同様に円板を半径方向に n 分割し、各領域の $f_1(r)$, $g_1(r)$ をそれぞれ相異なる一定値 f_{1j} , g_{1j} ($j=1,2,\dots,n$) で近似する。この場合、第 j 領域の変位 U_{rj}^1 , U_{rj}^2 は次式の Euler 型微分方程式を満足する。

$$U_{rj,rr} + f_{1j}r^{-1}U_{rj,r} + g_{1j}r^{-2}U_{rj} = \begin{cases} -(1+\nu)T_r \left\{ A_0 \int_{T_\infty}^T \alpha(x)dx - \alpha \right\}, & (U_{rj} = U_{rj}^1) \\ -\frac{w\omega^2 r}{Eg}(1-\nu^2), & (U_{rj} = U_{rj}^2) \end{cases} \dots (34)$$

この微分方程式の一般解は、次式のように得られる。

$$U_{rj}^1 = C_{1j}r^{\xi_{j1}} + C_{2j}r^{\xi_{j2}} + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1+\nu}{\xi_{j2} - \xi_{j1}} \times r^{\xi_{jk}} \int_{r_0}^r r^{1-\xi_{jk}} T_r \left\{ A_0 \int_{T_\infty}^T \alpha(x)dx - \alpha \right\} dr \dots (35)$$

$$U_{rj}^2 = C_{1j}^*r^{\xi_{j1}} + C_{2j}^*r^{\xi_{j2}} + \frac{\rho\omega^2(1-\nu^2)}{g(\xi_{j2} - \xi_{j1})} \sum_{k=1}^2 r^{\xi_{jk}} (-1)^k \int_{r_0}^r \frac{r^{2-\xi_{jk}}}{E} dr \dots (36)$$

ただし、 ξ_{j1} 、 ξ_{j2} は次式の相異なる2実根である。

$$x^2 + (f_{1j} - 1)x - g_{1j} = 0 \dots (37)$$

式(35),(36)を式(27),(28)に代入すると、応力成分式は、

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^2 (1 + \xi_{jk}\nu) r^{\xi_{jk}-1} \left[C_{kj} + (-1)^{k-1} \frac{1+\nu}{\xi_{j2} - \xi_{j1}} \times \int_{r_0}^r r^{1-\xi_{jk}} T_r \left\{ A_0 \int_{T_\infty}^T \alpha(x)dx - \alpha \right\} dr \right] - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{T_\infty}^T \alpha(x)dx \dots (38)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^2 (1 + \xi_{jk}\nu) r^{\xi_{jk}-1} \left\{ C_{kj}^* + (-1)^{k-1} \times \frac{\rho\omega^2(1-\nu^2)}{(\xi_{j2} - \xi_{j1})g} \int_{r_0}^r \frac{r^{2-\xi_{jk}}}{E} dr \right\} \dots (39)$$

$\sigma_{rr}^1, \sigma_{rr}^2$ の式は、 $\sigma_{\theta\theta}^1, \sigma_{\theta\theta}^2$ の式の $\sum_{k=1}^2$ のあとの $(1 + \xi_{jk}\nu)$ を $(\xi_{jk} + \nu)$ で置換するだけで得られる。

中空円板の力学的境界条件および連続条件は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0 & (r=r_0) \\ \sigma_{rr} &= 0 & (r=r_n) \\ \sigma_{rj} &= \sigma_{rj+1}, U_{rj} = U_{rj+1} & (r=r_j) \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

式(38),(39)に含まれる未知係数 $C_{1j}, C_{2j}, C_{1j}^*, C_{2j}^*$ は式(40)から決定される。

4. 数値計算と考察

まず、次式の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \varsigma &= r/r_n, \tau = \kappa/r_n^2, \bar{T}_i(\varsigma, \tau) = T_i(r, t)/T_{n\infty} \\ B_0 &= h_0 r_n / \lambda, B_n = h_n r_n / \lambda \\ \bar{\sigma}_{ij}^1 &= \sigma_{ij}^1 / E_0 \alpha_0 T_{n\infty} \\ \bar{\sigma}_{ij}^2 &= \sigma_{ij}^2 g / w \omega^2 r_n^2 \\ C_0 &= E_0 \alpha_0 T_{n\infty} g / w \omega^2 r_n^2 \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

ここでは内外側面周囲媒体温度を次式で与える。なお $T_{n\infty}$ は外側面における周囲媒体の定常温度である。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{in}^*(t) &= \theta_{in}(t) - T_\infty = T_{1\infty}(1 - e^{-t_x t}) - T_\infty \\ \theta_{out}^*(t) &= \theta_{out}(t) - T_\infty = T_{n\infty}(1 - e^{-t_s t}) - T_\infty \end{aligned} \right\} (42)$$

また、式(25)の $\sum_{m=1}^{\infty}$ を $\sum_{m=1}^{30}$ で近似した。

式(25)の温度関数を式(41)を用いて無次元表示すれば、次式となる。

$$\bar{T}_i^*(\varsigma, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m(\tau) \left\{ \bar{A}_{im} J_0(\bar{d}_{im}\varsigma) + \bar{B}_{im} Y_0(\bar{d}_{im}\varsigma) \right\} + \sum_{j=1}^2 \left\{ C_{ij} I_0(\bar{g}_{ij}\varsigma) + D_{ij} K_0(\bar{g}_{ij}\varsigma) \right\} \bar{P}_j(\tau) \dots (43)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_m(\tau) &= e^{-\gamma_m^2 \tau} \left[g_m^* + \frac{l_{m1}^* \tau_x}{\gamma_m^2 - \tau_x} \left\{ e^{(\gamma_m^2 - \tau_x)\tau} - 1 \right\} - \frac{l_{m2}^* \tau_s}{\gamma_m^2 - \tau_s} \left\{ e^{(\gamma_m^2 - \tau_s)\tau} - 1 \right\} \right] \\ \bar{P}_1(\tau) &= -\varepsilon(1 - e^{-\tau_x \tau}) + \delta, \bar{P}_2(\tau) = (1 - e^{-\tau_s \tau}) - \delta \\ \varepsilon &= T_{1\infty}/T_{n\infty}, \delta = T_\infty/T_{n\infty}, g_m^* = g_m A_{nm}/T_{n\infty} \\ \gamma_m &= \gamma_m r_n / \sqrt{\kappa}, l_{m1}^* = l_{m1} A_{nm}, l_{m2}^* = l_{m2} A_{nm} \\ \tau_x &= t_x r_n^2 / \kappa, \tau_s = t_s r_n^2 / \kappa \\ \bar{d}_{im} &= \sqrt{\gamma_m^2 - (B_{ui} + B_{li})/\bar{b}}, \bar{g}_{ij} = \sqrt{(B_{ui} + B_{li})/\bar{b}} \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

数値計算諸元として次の値を採用した。

$$\bar{b} = 0.05, \delta = 0, \tau_x = 1, \tau_s = 1, \varepsilon = 1, r_0/r_n = 0.1$$

また、円板の材料としてアルミニウムとチタン合金を採用すると線膨張係数の温度依存性は次式と表1で与えられる⁽¹²⁾。

$$\alpha(T) = a_0 + b_0 T \quad [K]^{-1} \dots (45)$$

Table 1 Temperature dependence of coefficient of thermal expansion and Young's modulus

Substance	$a_0 \times 10^6$	$b_0 \times 10^9$	$A_0 \times 10^4$	E_0
Al	15.50	23.09	7.20	85.9
Ti+6Al+4V+X _i	6.264	8.086	6.32	129

なお、表1には式(31)のヤング率の温度依存性を示す係数も記入した。また、ポアソン比は $\nu = 0.3$ とした。連続的な熱伝達率の変化を、等分割した各領域で相異なる一定の熱伝達率を有するものと近似して得られる本解析の温度解の精度及び有用性を評価するために、厳密解を求めうる式(46)の熱伝達率の変化をもつ中空円板の非定常熱伝導問題を考える。

$$h_u(r) = h_l(r) = h^* r_n^2 / r^2 \dots (46)$$

ここで、 h^* は一定値。上式を無次元化して、

$$B_u(\varsigma) = B_l(\varsigma) = B^* / \varsigma^2 \dots (47)$$

ただし、数値計算においては、 $B^* = 0.01$ を採用した。

図2は、ラプラス変換法によって厳密な温度解が得られる式(46)の熱伝達率の変化に対して、本解析手法による非定常温度分布と厳密解による非定常温度分

布を比較したものである。領域分割数 n を 10 にとると、全時間域において、本近似解析解による温度分布は厳密解による温度分布に良く一致しており、本解析手法の妥当性が証明されたと言える。

図 3 は、廣瀬ら⁴⁾が報告した回転円板上の空気の局所熱伝達率 (ヌセルト数) 分布から、円板 (固体) の諸量を使用して円板表面の無次元熱伝達率 (ビオー数) の分布を算出したものである。case(1),(2),(3) の熱伝達率分布を持つ円板の回転数はそれぞれ 0rpm, 90rpm, 180rpm に相当する。

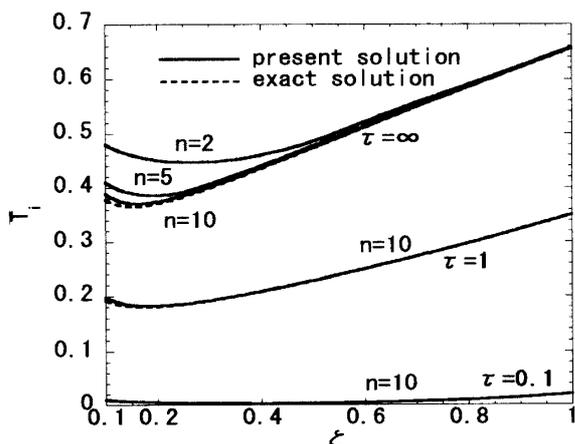


Fig. 2 Transient temperature distribution

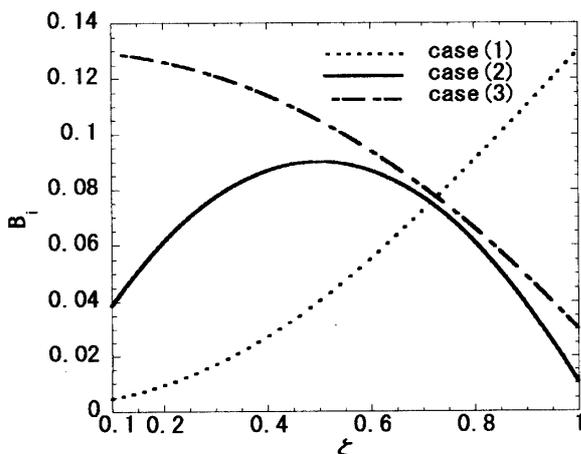


Fig. 3 Variation of B_i with radial coordinate

図 4,5,6 は、それぞれ case(1),(2),(3) のビオー数 B_i の変化に対して、本解析手法により得られた温度分布 (実線) と、円板上の B_i の最小値 (一点鎖線) と最大値 (点線) のいずれも一定値を使用して計算された温度分布の比較を示している。case(1),(2),(3) のいずれの場合もビオー数一定の計算で近似できず、特に、定常時の温度分布は熱伝達率が変化する場合と一定の場合で大きく相違している。このことは、熱伝達率が半径とともに任意に変化する場合の非定常温度場を解析できる本解析手法の重要性を示唆している。

図 7,8,9 は、板上下面のビオー数の半径方向の変化が case(1),(2),(3) の場合とビオー数一定値の場合の円周方向熱応力の比較を示したものである。case(1) の場合の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布は、ビオー数一定の場合の分布とは全域にわたって大きく相違している。例えば、定常時

の $z=1$ において、ビオー数の変化を考慮した熱応力

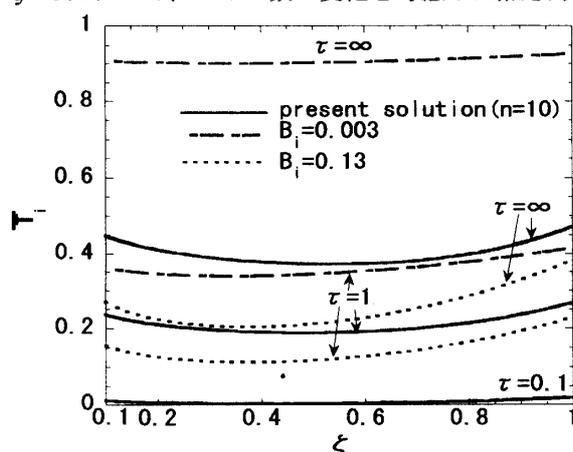


Fig. 4 Transient temperature distribution of case(1)

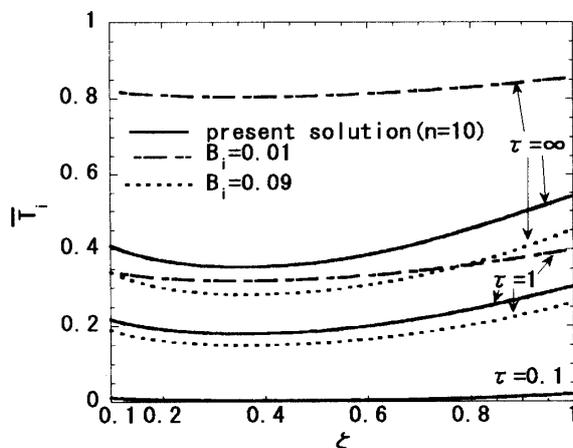


Fig. 5 Transient temperature distribution of case(2)

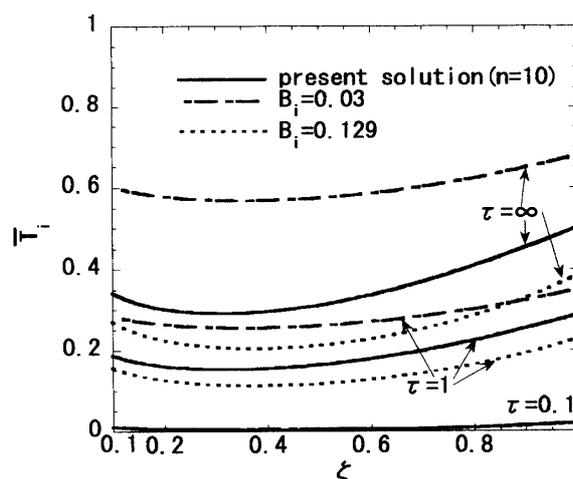


Fig. 6 Transient temperature distribution of case(3)

分布に対して、ビオー数を最小値 0.003 の一定値とした場合の熱応力は約 85% 過小に、また最大値 0.13 の一定値とした場合の熱応力は約 65% 過大に評価した熱応力となっている。一方、case(2) の定常時の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布は、ビオー数の変化を考慮した解析結果と最大値のビオー数 0.09 一定として解析した結果において良

く類似しており、単調増加でも単調減少でもない case(2) の様なビオー数の変化に対しては、ビオー数一定の解析で近似が可能である。

図 10 は、3 つのビオー数に対して、定常時の $\sigma_{\theta\theta}$ の分布を、ヤング率と線膨張係数の温度依存性を考慮した場合と考慮しない場合について示したものである。この図から弾性熱応力では、ヤング率と線膨張係数の温度依存性が熱応力分布に及ぼす影響は極めて小さく、現実には一定でない場合が多いビオー数の場所による変化を考慮する方がはるかに重要であることがわかる。なお、表 1 に示す温度依存性を持つチタン合金についても数値計算を行い、このような弾性熱応力に及ぼすヤング率と線膨張係数の温度依存性の影響が非常に小さいことを確認した。

図 11 はビオー数の変化が case(3) の場合について、回転による遠心力のために生ずる応力を熱応力に重ね合わせた応力分布である。遠心力による円周方向応力は内半径上で最大になるため、 C_0 が小さくなる、即ち遠心力の影響が大きくなると内半径上において大きな引張り応力を示す。また C_0 が逆に大きくなると遠心力による応力分布への影響が小さくなり熱応力のみでの応力分布に近づく。

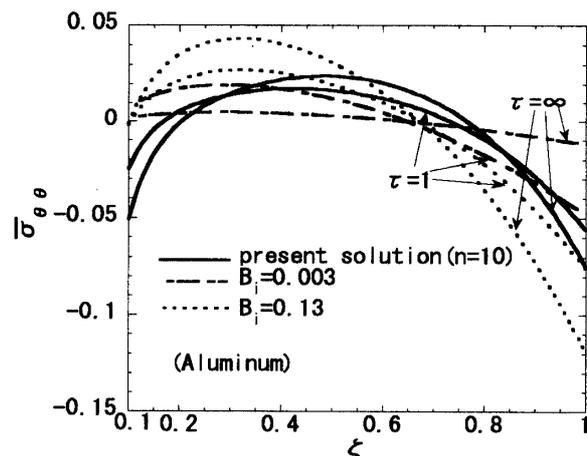


Fig. 7 Transient thermal stress distribution of case(1)

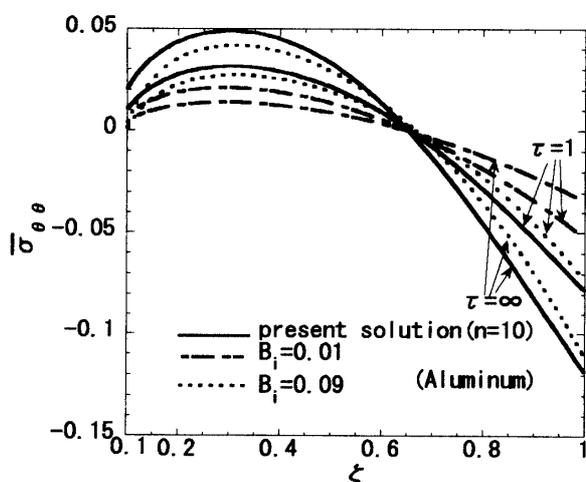


Fig. 8 Transient thermal stress distribution of case(2)

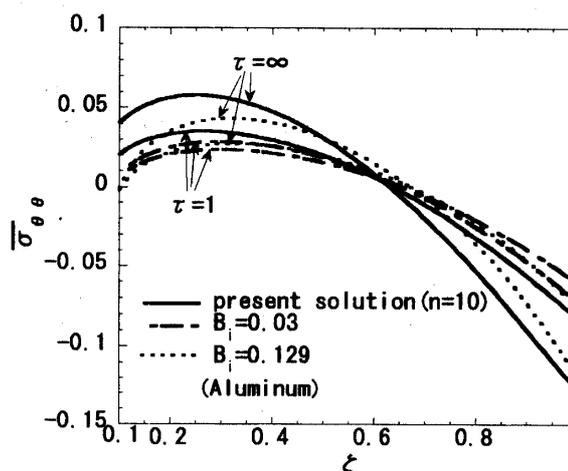


Fig. 9 Transient thermal stress distribution of case(3)

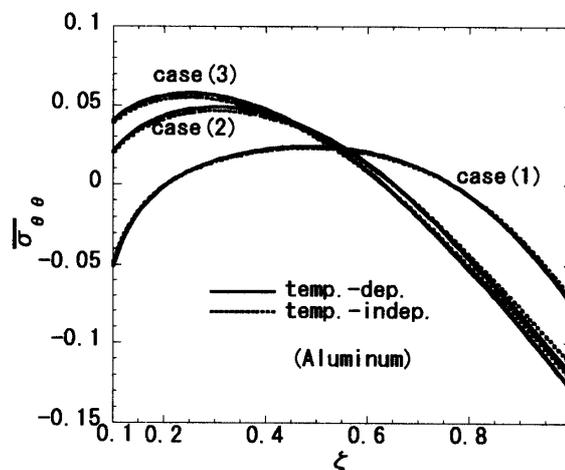


Fig. 10 Steady-state thermal stress distribution

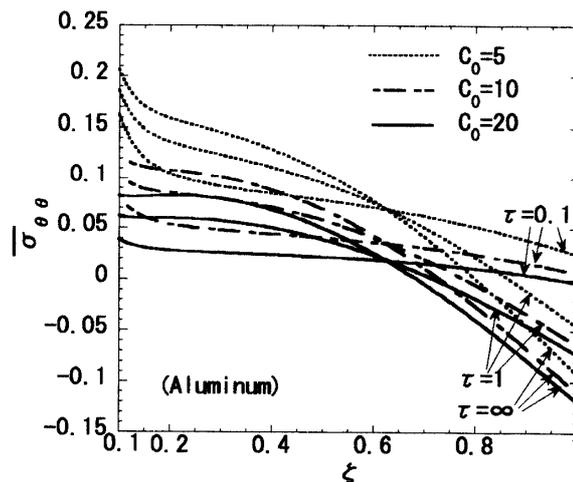


Fig. 11 Transient combined stress distribution of case(3)

5. 結 言

薄い円板の上下面の熱伝達率が半径方向に任意に変化する場合の非定常温度分布およびヤング率と線膨張係数の温度依存性を考慮した平面熱応力を解析

する方法を提案し、解析結果を数値計算して板上下面のピオー数の変化が温度分布や熱応力分布に及ぼす影響を調べ、次の結論を得た。

(1) case(1),(3)の B_1 をもつ温度分布は、経過時間の小さいときピオー数一定の温度分布で近似できるが、定常状態の温度分布は近似できない。

(2) 熱伝達率の半径方向変化がある場合について、工学的に十分な精度の温度値を得るために必要な領域分割数は 10 である。

(3) 線膨張係数とヤング率の温度依存性は熱応力分布にほとんど影響しなかったが、熱伝達率の半径方向の変化は熱応力分布に顕著な影響を示した。

文 献

- (1) 廣瀬、横山、大内, 機論, 61-590,B(1995),3770.
- (2) 笹田、藤井、亀田, 機論, 65-637,C(1999),3824.
- (3) 岩田、吉田, 機論, 58-547,C(1992),684.
- (4) 斎藤、鍵和田, 機論, 44-386(1978),3622.
- (5) Sugano, Y., Int. J. Eng. Sci., 21-10 (1983), 1203.
- (6) Chen, P.Y.P., J. Thermal Stresses, 11(1988), 115.
- (7) 庄司・他 2 名, 砥粒加工学会誌, 42-10(1998),30,35.
- (8) 井上, 精密機械, 37-2(昭 46-2),105.
- (9) 武田、金山・他 2 名, 機論, 55-515,B(1989),1499.
- (10) 菅野、森下、田中, 機論, 59-567,A(1993),2666.
- (11) Takeuti, et al., J. Thermal Stresses, 2 (1979), 233.
- (12) 竹内、野田, 熱応力, 日新出版, (1989),285,287.