

ランダム変動する境界温度をもつ傾斜機能積層平板の 熱変形と熱応力の確率論的研究*

菅野良弘^{*1}, 菅野敏広^{*2}, 千葉良一^{*3}

Stochastic Thermal Deformation and Thermal Stress in a Laminated Plate Including FGM Layer under Random Surface Temperatures

Yoshihiro SUGANO^{*4}, Toshihiro KANNO and Ryoichi CHIBA*⁴ Department of Mechanical Engineering, Iwate University,
4-3-5 Ueda, Morioka-shi, Iwate, 020-8551 Japan

Analytical solutions are presented for stochastic temperature, thermal deformation and thermal stress in a laminated plate including functionally graded material layer (FGM layer) subjected to random surface temperatures. The laminated plate has arbitrary nonhomogeneities of thermal and mechanical properties corresponding to arbitrary gradual change in the material composition, and temperature variation only through the thickness of plate. The surface temperatures are expressed by stochastic functions with respect to time. The transient temperature field is determined by solving the nonhomogeneous heat conduction problem in a multilayered plate with piecewise linear non-homogeneous thermal conductivity, and different, constant specific heat and density in each layer. Analytical expressions of the response autocorrelation functions for temperature, thermal stress and curvature are derived under the condition that the randomly varying surface temperatures of the laminated plate can be modeled as a stationary random process. Numerical calculations are carried out for a case that the random variation of the surface temperature is a white noise, and the FGM laminated plate is composed of PSZ and SUS 304.

Key Words: Thermoelasticity, Stochastic Thermal Deformation, Stochastic Thermal Stress, Analytical Solution, Laminated Plate, Functionally Graded Material, Random Surface Temperature

1. 結 言

熱応力緩和型傾斜機能材料 (FGM) の使用環境は、熱的に非常に厳しいばかりでなく、確定できないランダム性を持っている場合も少なくない。FGM は、所要の機能を発現させるために、金属 100% からセラミック 100% まで構成材料の組成や微視構造を連続的かつなめらかに変化させねばならないが、粒子噴射法やプラズマ溶射法、燃焼合成法などの合成プロセスを考えると、その熱的・機械的性質は確定論的なものとは言えず¹⁾、確率論的に取り扱う必要がある。また、ガスタービンなどの高温機器においては、構成する各要素の熱的環境や機械的負荷を正確に予測することは非常に困難であり²⁾、不確定要因が存在すると考えられる。このような材料特性や熱的境界条件にランダム性を有する場合、FGM 内の温度や熱応力は確率論的に評価されるべきものである。

しかし、確率論的な要因に起因する熱伝導問題や熱

応力問題を解析した報告は、たとえ均質体に対しても非常に少ない^{3) 4)}。これまでに熱的性質が板厚方向に特定の変化を示す不均質板について確率論的な熱応力問題の解析解⁵⁾が報告されているが、熱応力緩和のための材料設計に際して、板厚方向に任意の熱的不均質性を考慮した解析を必要とする FGM に適用できる解析解は報告されていない。

そこで本研究では、板厚方向の熱的・機械的不均質特性が任意である FGM からなる中間層を両側から均質層で挟んだ積層平板の両表面温度がランダム変動する場合について、熱伝導問題を区分的線形不均質法⁶⁾で解析し、また、板厚方向に熱弾性特性の不均質性が任意である積層平板の熱弾性問題を不均質平板の熱応力式⁷⁾により解析した。この結果から、温度、熱応力および曲率の統計量を解析的に導出し、中間層が SUS304/PSZ FGM であり、ランダム変動する境界温度が白色雑音で与えられる場合について数値計算を行い、温度、熱応力および曲率の統計量に及ぼす中間層の傾斜組成分布、均質層の厚さの影響を明らかにする。

2. 温度場の解析

図 1(a) のような x 軸方向に熱伝導率 λ 、比熱 c および密度 ρ の不均質性が任意である FGM 層を含む厚さ

* 原稿受付 2002 年 3 月 26 日。

^{*1} 正員, 岩手大学工学部(☎020-8551 盛岡市上田 4-3-5)。^{*2} 学生員, 岩手大学大学院。^{*3} 正員, 宮城工業高等専門学校(☎981-1239 名取市愛島塩手字野田山 48)。

E-mail: sugano@iwate-u.ac.jp

h の FGM 積層平板の温度場を考える。温度場の解析においては、平板を厚さ方向に n 層に分割し、中間の FGM 層の各層における熱伝導率分布を相異なる傾きをもつ直線で近似し、比熱と密度を各層において相異なる一定値で近似する区分的線形不均質法⁶⁾を用いた。また、各層の厚さを h_1, h_2, \dots, h_n とする。ここでは、図 1(a)のように厚さ h_1 の金属 100%層と厚さ h_n のセラミック 100%層によって FGM 層を挟んだ積層平板を、図 1(b)のような板厚方向に熱伝導率が任意に変化する FGM 平板の一例として取り扱う。ただし、第 1 層(金属層)と第 n 層(セラミック層)の熱伝導率には、区分的線形不均質法の解析上の制約から、金属およびセラミックの熱伝導率にわずかな傾きを持たせた近似値を使用する。一様に初期温度 0 の積層平板の両側表面が、時間 t に対してランダム変動する境界温度 $\varphi(t), \phi(t)$

(図 1(c)参照)によって加熱を受ける。本研究では、境界温度 $\varphi(t), \phi(t)$ を時間 t によって統計的性質の変化しない定常確率過程であるとする。上記の問題に対する熱伝導方程式、初期条件式、境界条件式、連続条件式はそれぞれ式(1)~(4)で与えられる。

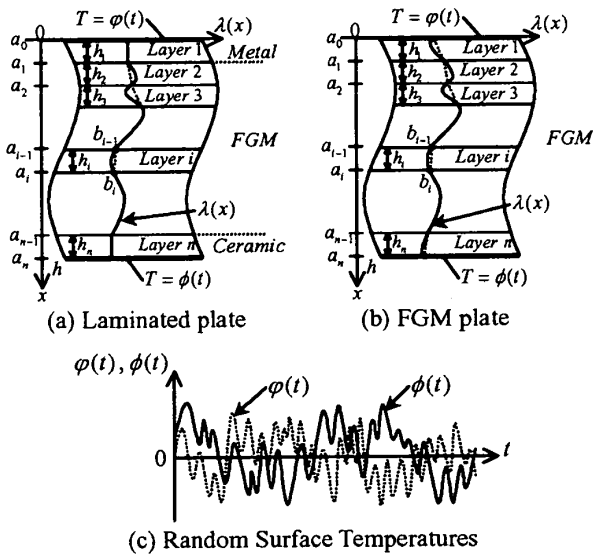


Fig.1 Analytical model and random surface temperatures

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda_i(x) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right\} = \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

$$T_i = 0, t = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \varphi(t), x = 0 \\ T_n &= \phi(t), x = h \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} T_i(x,t) &= T_{i+1}(x,t), x = a_i \quad (i=1,2,\dots,n-1) \\ \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial T_{i+1}(x,t)}{\partial x}, x = a_i \quad (i=1,2,\dots,n-1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、 T_i, ρ_i, c_i はそれぞれ第 i 層の温度、密度、比

熱であり、 $a_i (i=1,2,\dots,n-1)$ は、 n 層に分割された FGM 積層平板の各仮想界面の座標を表す。また、第 i 層の熱伝導率 $\lambda_i(x)$ を次式のように与える。

$$\lambda_i(x) = \lambda_i'(x - a_{i-1}) + b_{i-1} \quad (5)$$

ただし、 λ_i' は第 i 層の熱伝導率分布を近似する直線の傾きである。各層の熱伝導率分布を近似する直線を延長して x 軸と交わる点 x_i' を原点とする局所座標系を各層ごとに設定したのち、式(1)~(4)を局所座標表示し、これらの式にラプラス変換法とたたみ込みの定理を応用することにより解を導出し、全体座標に変換すれば第 i 層における非定常温度関数が次式のように導出される。ただし、導出の詳細は文献 6) を参照。

$$T_i(x,t) = - \left\{ \sum_{q=1}^i P_{\varphi}(x) \int_0^t \varphi(t-q) e^{-\gamma_i q} dq + \sum_{q=1}^n P_{\phi}(x) \int_0^t \phi(t-q) e^{-\gamma_i q} dq \right\} \quad (6)$$

ただし、 $P_{\varphi}(x), P_{\phi}(x)$ は次式で与えられる。

$$P_{\varphi}(x) = \frac{2\gamma_i G_{\varphi}(x, \gamma_i)}{\frac{d}{d\gamma} |A|_{\gamma=\gamma_i}}, \quad P_{\phi}(x) = \frac{2\gamma_i G_{\phi}(x, \gamma_i)}{\frac{d}{d\gamma} |A|_{\gamma=\gamma_i}} \quad (7)$$

また、 $G_{\varphi}(x, \gamma_i), G_{\phi}(x, \gamma_i), |A|$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} G_{\varphi}(x, \gamma_i) &= |\alpha_i|_{\varphi} J_0 \left(2\gamma_i \sqrt{\frac{x-x_i'}{\kappa_i}} \right) - |\beta_i|_{\varphi} Y_0 \left(2\gamma_i \sqrt{\frac{x-x_i'}{\kappa_i}} \right) \\ G_{\phi}(x, \gamma_i) &= |\alpha_i|_{\phi} J_0 \left(2\gamma_i \sqrt{\frac{x-x_i'}{\kappa_i}} \right) - |\beta_i|_{\phi} Y_0 \left(2\gamma_i \sqrt{\frac{x-x_i'}{\kappa_i}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} J_0(\gamma p_n) & -Y_0(\gamma p_n) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & J_0(\gamma p_n) & -Y_0(\gamma p_n) & -J_0(\gamma p_n) & Y_0(\gamma p_n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & u_n J_1(\gamma p_n) & -u_n Y_1(\gamma p_n) & -u_n J_1(\gamma p_n) & u_n Y_1(\gamma p_n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_0(\gamma p_n) & -Y_0(\gamma p_n) \end{vmatrix} \quad (9)$$

ただし、 κ_i は $\kappa_i = \lambda_i / \rho_i c_i$ で与えられる第 i 層の温度伝導率である。また、 $|A|$ は $(2n) \times (2n)$ の行列式であり、 $|\alpha_i|_{\varphi}, |\beta_i|_{\varphi}$ は、それぞれ $|A|$ の第 $(2i-1)$ 列目と第 $(2i)$ 列目を式(10)で置き換えることにより得られ、

$$|d| = |1, 0, \dots, 0| \quad (10)$$

$|\alpha_i|_{\phi}, |\beta_i|_{\phi}$ は、同様の手順を式(11)で置き換えることにより得られる。ただし、 $'| |'$ は $| |$ の転置を意味する。

$$|d| = |0, 0, \dots, 0, 1| \quad (11)$$

式(6)の $T_i(x,t)$ は、時間に対してランダム変動する境界温度 $\varphi(t), \phi(t)$ を含んでいる。そこで、温度の自己相関関数とスペクトル密度関数を求め統計的評価を行う。期待値演算子を $\langle \rangle$ とし、任意の時間間隔を τ とすれば、 $T_i(x,t)$ の自己相関関数⁸⁾は次式で与えられる。

$$R_T(x, \tau) = \langle T_i(x,t) T_i(x,t+\tau) \rangle \quad (12)$$

本研究で扱う境界温度 $\varphi(t), \phi(t)$ は定常確率過程であるから、期待値は 0 である。式(6), (12)より、 $T_i(x,t)$ の自己相関関数は次式のように導出される。

$$\begin{aligned}
R_T(x, \tau) = & \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\phi_l}(x) P_{\phi_m}(x) \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\phi_l}(x) P_{\phi_m}(x) \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\psi_l}(x) P_{\psi_m}(x) \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\psi_l}(x) P_{\phi_m}(x) \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \quad (13)
\end{aligned}$$

ただし, $\phi(t), \psi(t)$ の相関関数は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned}
R_{\phi\phi}(\tau+q-p) &= \langle \phi(t-q)\phi(t+\tau-p) \rangle \\
R_{\phi\psi}(\tau+q-p) &= \langle \phi(t-q)\psi(t+\tau-p) \rangle \\
R_{\psi\phi}(\tau+q-p) &= \langle \psi(t-q)\phi(t+\tau-p) \rangle \\
R_{\psi\psi}(\tau+q-p) &= \langle \psi(t-q)\psi(t+\tau-p) \rangle
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

温度のスペクトル密度関数は, Wiener-Khinchine の関係式⁸⁾より次式で与えられる.

$$S_T(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_T(x, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (15)$$

ただし, ω は周波数, j は虚数である.

3. 熱応力場の解析

前述の非定常温度場による FGM 積層平板の熱応力を統計的に解析する. x の任意の関数で表されるヤング率 E , 線膨張係数 α , ポアソン比 ν をもつ FGM 積層平板を温度場の解析と同様に n 層に分割すると, 第 i 層の熱応力は, 著者の一人による不均質平板の熱応力式⁷⁾によって次のように解析できる.

$$\sigma_i(x, t) = \frac{E(x)}{1-\nu(x)} \left\{ -\alpha(x) T_i(x, t) + \frac{(I_2 x - I_3) I_F + (I_2 - I_1 x) I_M}{I_2^2 - I_1 I_3} \right\} \quad (16)$$

ただし, I_1, I_2, I_3, I_F, I_M は次式で与えられる.

$$I_a = \int_0^h \frac{x^{a-1} E(x)}{1-\nu(x)} dx \quad (a=1, 2, 3) \quad (17)$$

$$I_F = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{E(x)\alpha(x)}{1-\nu(x)} T_i(x, t) dx \quad (18)$$

$$I_M = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{x E(x)\alpha(x)}{1-\nu(x)} T_i(x, t) dx \quad (19)$$

式(16)の熱応力式 $\sigma_i(x, t)$ には, ランダム変動する温度関数 $T_i(x, t)$ が含まれている. そこで, 熱応力の統計量として自己相関関数およびスペクトル密度関数を導出する. 熱応力の自己相関関数は, 式(12)と同様の式から次式のように導出される.

$$\begin{aligned}
R_{\sigma_i}(x, \tau) = & \left(\frac{E(x)}{1-\nu(x)} \right)^2 \left[\alpha^2(x) R_T(x, \tau) \right. \\
& - \frac{2\alpha(x)}{I_2^2 - I_1 I_3} \left[(I_2 x - I_3) V_1(x, \tau) + (I_2 - I_1 x) V_2(x, \tau) \right] \\
& + \frac{1}{(I_2^2 - I_1 I_3)^2} \left[(I_2 x - I_3)^2 W_{11}(\tau) + (I_2 x - I_3)(I_2 - I_1 x) \right. \\
& \quad \left. \times \{W_{12}(\tau) + W_{21}(\tau)\} + (I_2 - I_1 x)^2 W_{22}(\tau) \right] \quad (20)
\end{aligned}$$

ただし, $V_u(x, \tau), W_{uv}(\tau) (u, v=1, 2)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
V_u(x, \tau) = & \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\phi_l}(x) I_{u\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\phi_l}(x) I_{u\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\psi_l}(x) I_{u\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n P_{\psi_l}(x) I_{u\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{uv}(\tau) = & \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\phi l} I_{v\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\phi l} I_{v\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\psi l} I_{v\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\psi l} I_{v\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \quad (22)
\end{aligned}$$

また, $I_{b\phi c}, I_{b\psi c} (b=1, 2, c=l, m)$ は次式で与えられる.

$$\{I_{b\phi c}, I_{b\psi c}\} = \int_0^h \frac{x^{b-1} E(x)\alpha(x)}{1-\nu(x)} \{P_{\phi c}(x), P_{\psi c}(x)\} dx \quad (23)$$

次に, 熱応力のスペクトル密度関数は式(15)と同様に, 次式により得られる.

$$S_{\sigma_i}(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\sigma_i}(x, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (24)$$

4. 曲率の解析

FGM 積層平板の第 i 層の曲率 $\mu_i(t)$ は, 次式のように報告されている⁹⁾.

$$\mu_i(t) = \frac{I_2(I_F + F_0) - I_1(I_M + F_1)}{2(I_2^2 - I_1 I_3)} \quad (25)$$

ただし, F_0, F_1 は次式で与えられる.

$$F_k = \int_0^h x^k \sigma_i(x, t) dx \quad (k=0, 1) \quad (26)$$

曲率の自己相関関数は, 次式のように導出される.

$$\begin{aligned}
R_{\mu_i}(\tau) = & \frac{1}{4(I_2^2 - I_1 I_3)^2} \left[I_1^2 \{M_{11} + 2N_{11} + U_{11}\} \right. \\
& - 2I_1 I_2 \{K_{21} - K_{12} + L_{21} - L_{12} + N_{12} + N_{21} \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21} + U_{12} + U_{21})\} + I_2^2 \{M_{22} + 2N_{22} + U_{22}\} \right] \quad (27)
\end{aligned}$$

また, $K_{uv}, L_{uv} (u, v=1, 2, u \neq v), M_{uv}, N_{uv}, U_{uv} (u, v=1, 2)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
K_{uv}(\tau) = & \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\phi l} X_{v\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\phi l} X_{v\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\psi l} X_{v\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\psi l} X_{v\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{uv}(\tau) = & \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\phi l} Z_{v\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\phi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\psi l} Z_{v\phi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\phi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp \\
& + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n I_{u\psi l} Z_{v\psi m} \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\psi\psi}(\tau+q-p) e^{-(\nu^2 q + \tau_m^2 p)} dq dp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{uv}(\tau) & = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} X_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} X_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} X_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} X_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{uv}(\tau) & = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{uv}(\tau) & = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{u\phi l} Z_{v\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau+q-p) e^{-(r_l^2 q + r_m^2 p)} dq dp \quad (32)
 \end{aligned}$$

また、 $X_{b\phi c}, X_{b\phi c}, Z_{b\phi c}, Z_{b\phi c}$ ($b=1, 2, c=l, m$) は次式で与えられる。

$$\{X_{b\phi c}, X_{b\phi c}\} = \int_0^h x^{b-1} \alpha(x) \left(\frac{E(x)}{1-\nu(x)} \right)^2 \frac{I_2 x - I_3}{I_2^2 - I_1 I_3} \{P_{\phi c}(x), P_{\phi c}(x)\} dx \quad (33)$$

$$\{Z_{b\phi c}, Z_{b\phi c}\} = \int_0^h x^{b-1} \alpha(x) \left(\frac{E(x)}{1-\nu(x)} \right)^2 \frac{I_2 - I_1 x}{I_2^2 - I_1 I_3} \{P_{\phi c}(x), P_{\phi c}(x)\} dx \quad (34)$$

次に、曲率のスペクトル密度関数は式(15)と同様に、次式により得られる。

$$S_{\mu_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mu_i}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (35)$$

5. 数値計算

数値計算例として、FGM 積層平板の $x=0$ の境界温度 $\phi(t)$ が決定論的に 0 で与えられ、 $x=h$ の境界温度 $\phi(t)$ が白色雑音で与えられる場合を採用した。この場合、境界温度の相関関数 $R_{\phi\phi}, R_{\phi\phi}, R_{\phi\phi}$ は 0 となり、 $R_{\phi\phi}$ は次式のように与えられる。

$$R_{\phi\phi}(\tau) = T_s^2 \delta(\tau) \quad (36)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$ は Dirac の Delta 関数、 T_s は定数である。また、本研究で用いた区分的線形不均質法は、少ない層数で精度の良い非定常温度解が得られることが報告されている⁹⁾ので、ここでは FGM 平板を 5 層に分割した。FGM 層を含む積層平板の場合、冷却側に厚さ h_1 金属 100%層、加熱側に厚さ h_n のセラミック 100%層を

設け、 $H_1 = h_1/h$ 、 $H_n = h_n/h$ がそれぞれ 0.1, 0.2 の場合について数値計算を行った。ここでは、温度、熱応力および曲率の二乗平均値を計算して、それらのランダム変動を評価する。二乗平均値は、式(13), (20), (27)において $\tau=0$ を代入することにより得られる。本解析では、定常確率過程として境界温度 $\phi(t)$ の期待値を 0 で与えているので、温度、熱応力および曲率の期待値も 0 となるため、温度、熱応力および曲率の二乗平均値は分散と等しいことになる。また、数値計算に際して、次式の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned}
 \xi & = x/h, \quad \bar{a}_i = a_i/h, \quad \bar{i} = \kappa_0 t/h^2, \quad \bar{\tau} = \kappa_0 \tau/h^2 \\
 \bar{T}_i & = T_i/T_s, \quad R_{\bar{\tau}_i}(\xi, \bar{\tau}) = \langle \bar{T}_i(\xi, \bar{i}) \bar{T}_i(\xi, \bar{i} + \bar{\tau}) \rangle \\
 \bar{\sigma}_i & = \sigma_i / \{E_0 \alpha_0 T_s / (1-\nu_0)\}, \quad R_{\bar{\sigma}_i}(\xi, \bar{\tau}) = \langle \bar{\sigma}_i(\xi, \bar{i}) \bar{\sigma}_i(\xi, \bar{i} + \bar{\tau}) \rangle \\
 \bar{\mu}_i & = \mu_i / (\alpha_0 T_s / h), \quad R_{\bar{\mu}_i}(\bar{\tau}) = \langle \bar{\mu}_i(\bar{i}) \bar{\mu}_i(\bar{i} + \bar{\tau}) \rangle \quad (37)
 \end{aligned}$$

ただし、 $\kappa_0 = \lambda_0 / \rho_0 c_0$ で与えられ、 $E_0, \alpha_0, \nu_0, \lambda_0, \rho_0, c_0$ はそれぞれ金属のヤング率、線膨張係数、ポアソン比、熱伝導率、密度、比熱である。セラミック 100%層を PSZ、金属 100%層を SUS304 とし、FGM 層を SUS304/PSZ FGM とする。表 1 に PSZ, SUS304 の材料特性を示す。ここでは簡単のため、各材料組成分布に対する FGM の材料特性は線形複合則から算出した。前記のように解析上、SUS304 層および PSZ 層の無次元熱伝導率については、これらの層の両表面の値をそれぞれ 1 と 0.99 および 0.105 と 0.104 で近似した。また、FGM 平板 ($H_1 = H_n = 0$) における板厚方向の PSZ の組成分布 $f_{PSZ}(\xi)$ を次式で定義し、図 2 に示す。

$$\begin{aligned}
 f_{PSZ}(\xi) & = 1 - (1-\xi)^{\eta_R} \quad (\text{ceramic-rich}) \\
 f_{PSZ}(\xi) & = \xi^{\eta_P} \quad (\text{ceramic-poor}) \quad (38)
 \end{aligned}$$

ただし、 η_R, η_P は組成分布パラメータである。

Table 1 Material properties of PSZ and SUS304

	PSZ	SUS304
Thermal conductivity λ [W/(m·K)]	1.67	15.97
Young's Modulus E [GPa]	211	193
Coefficient of Linear Expansion α [$\times 10^{-6}$ 1/K]	2.93	14.87
Density ρ [kg/m ³]	5730	7930
Specific Heat c [kJ/(kg·K)]	0.467	0.361

5.1 温度の二乗平均値 図 3(a)は FGM 平板の温度の二乗平均値の板厚方向分布を、図 3(b),(c)はそれぞれ $H_1 = H_n = 0.1$ 、 $H_1 = H_n = 0.2$ の FGM 積層平板の温度の二乗平均値の板厚方向分布を示す。図 3(a)を見ると、板厚全体においてセラミックリッチの場合に温度変動が抑えられている。図 3(b),(c)を見ると、冷却側ではセ

ラミックリッチの場合に温度変動が抑えられているが、加熱側ではセラミックプアの場合に温度変動が大きく抑えられていることがわかる。均質層を有することにより、温度変動が一番抑えられる組成分布が高温側においてセラミックリッチからセラミックプアへ逆転している。また、図3(a)と(b),(c)を比較すると、均質層を有する場合、どの組成分布の場合も変動領域が狭くなっており、特にセラミックプアの場合において顕著に現れている。これは、熱伝導率の小さいセラミック100%層によって平板表面の温度変動が平板内部まで伝わりにくくなるため、FGM 積層平板の方が平板内部の温度変動が抑えられるものと考えられる。

5.2 熱応力の二乗平均値 図4(a)はFGM 平板の熱応力の二乗平均値の板厚方向分布を、図4(b),(c)はそれぞれ $H_1 = H_n = 0.1$, $H_1 = H_n = 0.2$ のFGM 積層平板の熱応力の二乗平均値の板厚方向分布を示す。図4(a)を見ると、温度と同様に板厚全体においてセラミックリッチの場合に熱応力変動が抑えられている。図4(b)では、加熱側のごく狭い領域でセラミックプアの場合に熱応力変動が抑えられているが、それ以外のところではセラミックリッチの場合に熱応力の変動が抑えられている。図4(c)を見ると、平板全体を通して線形傾斜の場合に熱応力変動が抑えられている。また、図4(a)と(b),(c)を比較すると、温度と同様に均質層を有する場合に変動領域が狭くなっている。これまでの境界温度が確定論的に与えられた場合の傾斜機能平板の熱応力解析は、セラミックリッチの場合に熱応力緩和効果を発揮することが報告されている¹⁰⁾。境界温度が確率論的に与えられた場合、FGM 平板ではセラミックリッチの場合に温度および熱応力変動が抑えられ、セラミックリッチが最良な組成分布であるが、FGM 積層平板では両側の均質層の厚さの増大とともに、セラミックプア、線形の組成分布が良いことがわかる。

5.3 PSZ 組成分布変化パターンに対する曲率の二乗平均値 図5は、PSZ の組成分布の相違による曲率の二乗平均値の変化を示す。この図より、均質層が厚いほど曲率が小さくなっており、均質層の存在により、曲率が抑えられていることがわかる。しかし、 $H_1 = H_n = 0.1$ と $H_1 = H_n = 0.2$ では、ほとんど差がないことがわかる。また、均質層厚さに関係なくセラミックの含有量が増加すると曲率は小さくなる。これは、熱伝導率の小さいセラミックの体積分率がセラミックリッチの場合、積層平板の表面温度が平板内部まで伝わりにくいことに加えて、セラミックの線膨張係数が金属に比べ約 1/5 と小さいために平板があまり変形しないことによるものと考えられる。以上により、ラン

ダム変動する境界温度が与えられた場合、曲率の変動の観点からは、FGM 平板およびFGM 積層平板ともにセラミックリッチが最良の組成であることがわかる。

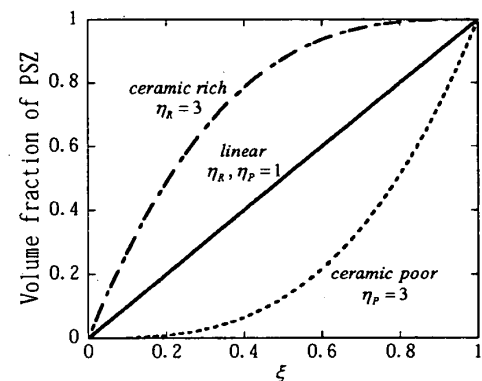
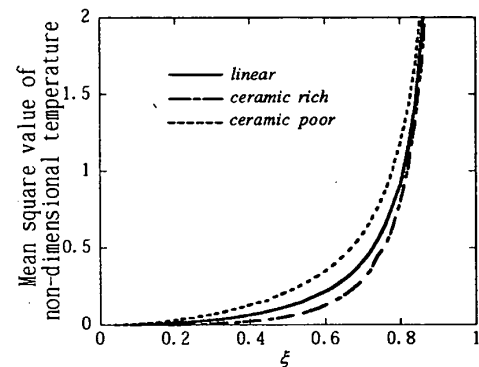
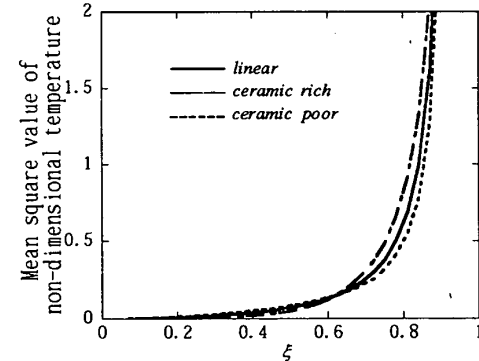


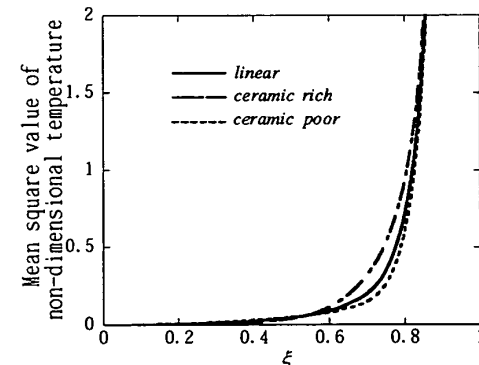
Fig.2 Compositional distribution of FGM



(a) FGM plate

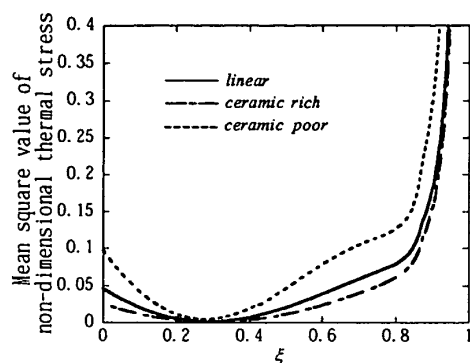


(b) Laminated plate ($H_1 = H_n = 0.1$)



(c) Laminated plate ($H_1 = H_n = 0.2$)

Fig.3 Mean square values of non-dimensional temperature



(a) FGM plate

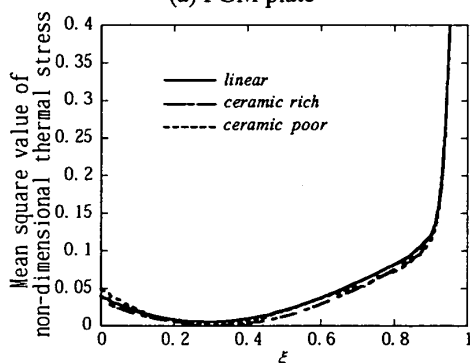
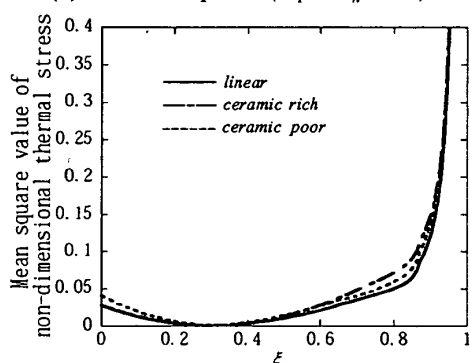
(b) Laminated plate ($H_1 = H_n = 0.1$)(c) Laminated plate ($H_1 = H_n = 0.2$)

Fig.4 Mean square values of non-dimensional thermal stress

6. 結 言

本研究では、板厚方向に任意の不均質性を有する FGM 積層平板の境界温度がランダム変動する場合について、温度、熱応力および曲率の解析解を求め、これらの統計量として自己相関関数を解析的に導出した。また、数値計算例として、片側の境界温度が白色雑音で与えられ、FGM が PSZ と SUS304 からなる場合を取り上げ、傾斜組成分布、均質層の厚さの相違が温度、熱応力および曲率の統計量に及ぼす影響を考察した。

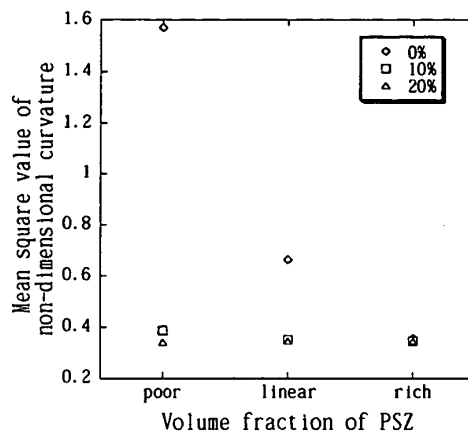


Fig.5 Mean square values of non-dimensional curvature

得られた結論は、以下の通りである。

- (1) FGM 平板では、温度および熱応力の変動はセラミックリッチの場合に抑えられる。
- (2) FGM 積層平板では、100%セラミック層の存在により、平板内部まで境界温度の変動が伝わりにくくなり、FGM 平板より温度および応力の変動が抑えられる。この傾向は、100%セラミック層の厚さを厚くし、線形組成分布のときに顕著に現れる。
- (3) 曲率の変動を抑制するためには、FGM 平板、FGM 積層平板ともセラミックリッチが最良の組成分布である。

文 献

- 1) 傾斜機能材料研究会編, 傾斜機能材料, (1993), 40, 65, 工業調査会.
- 2) 宮田, 機論, 54-505(1988), 1700.
- 3) 天田, 材料, 31-342(1982), 251.
- 4) Clifton, S., Int. Trans. ASME, 9(1966), 301.
- 5) 菅野・木元, 機論, 54-507, A(1988), 1993.
- 6) 菅野・佐藤・須見, 機論, 63-606, A(1997), 378.
- 7) Sugano, Y., Ing.-Arch., 57-2(1987), 147.
- 8) Price, W.G. & Bishop, R.E.D., 確率過程工学, (田口・藤原・他共訳), (1980), 55, 77, 共立出版.
- 9) Suresh, S. & Mortensen, A., Fundamentals of Functionally Graded Materials, (1998), 100, IOM Communi. Ltd.
- 10) 菅野・佐藤・木村・須見, 機論, 62-595, A(1995), 140.