

## 傾斜機能材料回転円板の熱応力緩和材料設計\*

菅野良弘<sup>\*1</sup>, 千葉良一<sup>\*2</sup>  
廣瀬宏一<sup>\*1</sup>, 高橋和宏<sup>\*3</sup>Material Design for Reduction of Thermal Stress  
in a Functionally Graded Material Rotating DiskYoshihiro SUGANO<sup>\*4</sup>, Ryoichi CHIBA,  
Koichi HIROSE and Kazuhiro TAKAHASHI<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Iwate University,  
4-3-5 Ueda, Morioka-shi, Iwate, 020-8551 Japan

The purpose of this paper is to present a method of material design for the weight reduction, the high thermal radiation and the relaxation of in-plane thermal stress and centrifugal stress in a rotating disk without hole composed of functionally graded material (FGM) with arbitrary thermal and mechanical nonhomogeneities in the radial direction. The disk is subjected to an intermittent heating in an annular region near the outer radius and has an arbitrary variation of heat-transfer coefficient along the radial position on the upper and lower surfaces. The transient temperature field is analyzed by modifying Vodicka's method for one-dimensional boundary value problems in composite regions and the thermal stress and centrifugal stress are respectively obtained by solving approximately the equilibrium equations expressed in terms of the displacement component. The material design is carried out for the rotating disks composed of Ti+6 Al+4 V and SUS 410 FGM, and Ti+6 Al+4 V, PSZ and SUS 410 FGM.

**Key Words:** Thermal Stress Reduction, Functionally Graded Material, Nonhomogeneous Rotating Disk, Centrifugal Stress, Intermittent Heating, Analytical Solution

## 1. 緒 言

温度場、熱応力場の解析を伴った回転円板の強度/材料設計の問題は、ディスクブレーキ<sup>(1)</sup>、木材切断用の丸鋸の腰入れ<sup>(2)</sup>、研削砥石<sup>(3)</sup>、旋盤による端面切削などにおいて非常に重要であり、多くの研究がなされている。自動二輪車用の大型の一体型ディスクブレーキに繰り返し過負荷をかけた場合、熱放散と軽量化のために設けられた飾り窓間のブリッジ部で、降伏現象に起因したお椀型の変形<sup>(1)</sup>が起こることが実験的に指摘されている。ブリッジ部の降伏を防ぐためには、飾り窓を有しないで熱放散性、軽量性に優れた材料で設計する必要があるが、均質材料でこのような条件下での設計は不可能である。そこで、この飾り窓を持たない大型ディスクブレーキを、強度と熱放散性と軽量性に優れた半径方向の不均質性を有する傾斜機能材料(FGM)で設計することが考えられる。事実、より厳しい熱サイクル負荷を受ける航空機や新型の新幹線用車両のブレーキ材料として、FGMの使用を想定した研

究が始められている。

本研究では、傾斜機能材料によって、飾り窓を持たずに現存のディスクブレーキと同程度の高熱放散性、強度、軽量化を実現するディスクブレーキを設計することを最終目標とし、ここでは第一段階として、熱的・機械的特性の半径方向の不均質性が任意である傾斜機能材料円板にブレーキを模擬した熱サイクル負荷が作用した場合の温度場の解析手法と、熱応力と遠心力による応力を緩和させる材料設計の手法を提案する。解析するにあたり、著者らの報告<sup>(4),(5)</sup>から熱伝達率の場所による変化は非定常温度分布・熱応力分布に顕著な影響をもたらす、実際の設計において重要であることが指摘されているため、本研究では円板両表面の熱伝達率の半径方向変化を考慮して解析する。

## 2. 非定常温度場の解析

2.1 一定熱負荷による温度場 傾斜機能材料からなる内外半径  $r_0, r_n$ 、板厚  $b$  の薄い不均質中空円板の板上下面の熱伝達率がそれぞれ半径座標の任意関数  $h = h_u(r), h_l(r)$  で変化し、外半径付近( $r_n \leq r \leq r_0$ )に単位時間、単位体積あたり熱発生量  $q$  を与えた場合の非定

\* 原稿受付 2002年4月26日。

<sup>\*1</sup> 正員、岩手大学工学部(☎020-8551 盛岡市上田4-3-5)。<sup>\*2</sup> 正員、宮城工業高等専門学校(☎981-1239 名取市愛島塩手字野田山48)。<sup>\*3</sup> ニチコン岩手(株)(☎028-4305 岩手県岩手郡岩手町大字久保8-17-1)。

E-mail: sugano@iwate-u.ac.jp

常温度場を解析する。円板の初期温度と板上下面の周囲媒体温度を  $T_\infty$ ,  $r=r_0$ ,  $r=r_n$  の板側面の熱伝達率を  $h_{in}$ ,  $h_{out}$ , 周囲媒体温度を  $\theta_{in}(t)$ ,  $\theta_{out}(t)$  とすると, 半径方向のみ不均質性を有する中空円板の非定常熱伝導方程式は次のように表される。

$$\frac{1}{r} \left( r \lambda(r) T_{,r} \right)_{,r} - \frac{h_u(r) + h_l(r)}{b} (T - T_\infty) + qH(r - r_n) = \rho(r)c(r)T_{,t} \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで,  $\lambda(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $c(r)$  はそれぞれ熱伝導率, 密度, 比熱であり,  $r$  は  $r$  に関する微分を示す。また,  $H(\cdot)$  はヘビサイドのステップ関数を表す。式(1)より, 任意の不均質性, 任意の熱伝達率の半径方向変化に関して解析解を得ることはほとんど不可能であるため, 本研究では図1のように中空円板を半径方向に相異なる一定の熱特性を有する均質な  $n$  層に分割し, 多層均質中空円板として解析する。

個々の層の熱伝導率, 比熱, 密度, 外側半径をそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ;  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ;  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ;  $r_1, r_2, \dots, r_n$  とし, 第  $i$  層の温度関数を  $T_i$  とすると, この非定常熱伝導問題は次のように定式化される。

$$\lambda_i \left( T_{i,r}^* + \frac{1}{r} T_{i,r}^* \right) - \frac{h_{ui} + h_{li}}{b} T_i^* + Q(r) = \rho_i c_i T_{i,t}^* \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\lambda_1 T_{1,r}^* - h_{in} (T_1^* - \theta_{in}^*(t)) = 0 \quad (r=r_0) \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\lambda_n T_{n,r}^* + h_{out} (T_n^* - \theta_{out}^*(t)) = 0 \quad (r=r_n) \quad \cdots \cdots (4)$$

$$T_i^* = T_{i+1}^*, \quad \lambda_i T_{i,r}^* = \lambda_{i+1} T_{i+1,r}^* \quad (r=r_i) \quad \cdots \cdots (5)$$

$$T_i^* = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (t=0) \quad \cdots \cdots (6)$$

ただし,

$$T_i^* = T_i - T_\infty, \quad \theta_{in}^*(t) = \theta_{in}(t) - T_\infty$$

$$\theta_{out}^*(t) = \theta_{out}(t) - T_\infty, \quad Q(r) = qH(r - r_n)$$

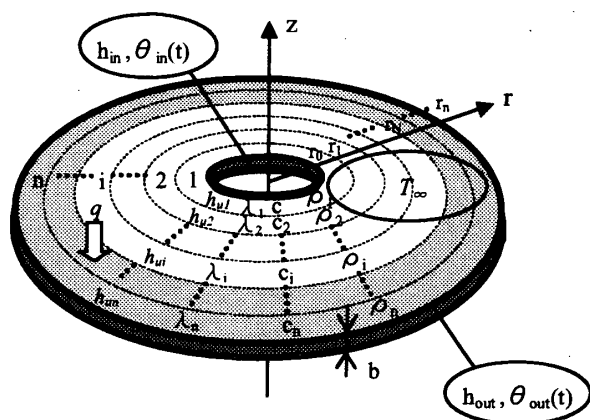


Fig.1 Analytical model for a FGM rotating disk

傾斜機能平板の非定常温度解<sup>(6)</sup>と同様, 上記の1次元非定常熱伝導問題の解を次のように分離する。

$$T_i^*(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) X_{im}(r) + \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) P_j(t) \quad \cdots \cdots (7)$$

ただし,

$$P_1(t) = -\theta_{in}^*(t), \quad P_2(t) = \theta_{out}^*(t) \quad \cdots \cdots (8)$$

また,  $L_{ij}(r)$  は次式の解である。

$$L_{ij,r,r} + \frac{1}{r} L_{ij,r} - \frac{(B_{ui} + B_{li})}{r_n^2 b \lambda_i} L_{ij} = 0 \quad \cdots \cdots (9)$$

ここで,  $B_{ui}$ ,  $B_{li}$  はビオ一数であり,  $\lambda_0$  をある代表熱伝導率とすれば,  $B_{ui} = h_{ui} r_n / \lambda_0$ ,  $B_{li} = h_{li} r_n / \lambda_0$  である。

また,  $\bar{b} = b / r_n$ ,  $\bar{\lambda}_i = \lambda_i / \lambda_0$  である。

さらに,  $X_{im}(r)$  は次式の固有値問題の解である。

$$\left. \begin{aligned} X_{im}(r)_{,r} + \frac{1}{r} X_{im}(r)_{,r} + \left( \frac{\gamma_m^2}{\kappa_i} - \frac{(B_{ui} + B_{li})}{r_n^2 b \bar{\lambda}_i} \right) X_{im}(r) &= 0 \\ X_{1m,r} - H_0 X_{1m} &= 0 \quad (r=r_0) \\ X_{nm,r} + H_n X_{nm} &= 0 \quad (r=r_n) \\ X_{im} &= X_{(i+1)m}, \quad \lambda_i X_{im,r} = \lambda_{i+1} X_{(i+1)m,r} \quad (r=r_i) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (10)$$

ただし,  $\kappa_i = \lambda_i / c_i \rho_i$ ,  $H_0 = h_{in} / \lambda_1$ ,  $H_n = h_{out} / \lambda_n$

$L_{ij}(r)$ ,  $X_{im}(r)$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$L_{ij}(r) = C_{ij} I_0(g_i r) + D_{ij} K_0(g_i r) \quad \cdots \cdots (11)$$

$$X_{im}(r) = A_{im} J_0(d_{im} r) + B_{im} Y_0(d_{im} r) \quad \cdots \cdots (12)$$

ここで,  $I_0(\cdot)$ ,  $K_0(\cdot)$  はそれぞれ0次の第一種, 第二種変形 Bessel 関数, また  $J_0(\cdot)$ ,  $Y_0(\cdot)$  はそれぞれ0次の第一種, 第二種 Bessel 関数である。

$$g_i = \sqrt{(B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 b \bar{\lambda}_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$d_{im} = \sqrt{\gamma_m^2 / \kappa_i - (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 b \bar{\lambda}_i}$$

式(12)は  $\gamma_m^2 / \kappa_i \geq (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 b \bar{\lambda}_i$  の場合の解であり,  $\gamma_m^2 / \kappa_i \leq (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 b \bar{\lambda}_i$  の場合は次式で与えられる。

$$X_{im}(r) = A_{im} I_0(d_{im}^* r) + B_{im} K_0(d_{im}^* r) \quad \cdots \cdots (13)$$

ただし,  $d_{im}^* = \sqrt{(B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 b \bar{\lambda}_i - \gamma_m^2 / \kappa_i}$

また, 未知係数  $A_{im}$ ,  $B_{im}$  を次式のようにおく。

$$A_{im} = \overline{A_{im}} A_{nm}, \quad B_{im} = \overline{B_{im}} A_{nm}, \quad \overline{A_{nm}} = 1$$

このとき,  $\overline{A_{im}}$ ,  $\overline{B_{im}}$  は式(10)から決定される。

式(7)を式(3)~(5)に代入し, 式(8), (10)を考慮すれば,

$L_{ij}(r)$  に関する次の条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_{11,r} - H_0 L_{11} &= H_0 \quad (r=r_0) \\ L_{n1,r} + H_n L_{n1} &= 0 \quad (r=r_n) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{i1} &= L_{(i+1)1}, \quad \lambda_i L_{i1,r} = \lambda_{i+1} L_{(i+1)1,r} \quad (r=r_i) \\ L_{12,r} - H_0 L_{12} &= 0 \quad (r=r_0) \\ L_{n2,r} + H_n L_{n2} &= H_n \quad (r=r_n) \\ L_{i2} &= L_{(i+1)2}, \quad \lambda_i L_{i2,r} = \lambda_{i+1} L_{(i+1)2,r} \quad (r=r_i) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (15)$$

固有値  $\gamma_m$  は未知係数  $A_{im}$ ,  $B_{im}$  が0以外の解を持つための条件から決定され, 次の超越方程式の正根として求められる。

$$G_{e1} \cdot E_{e1} \cdot E_{e2} \cdots E_{en-2} \cdot E_{en-1} \cdot a_{en} = 0 \quad \cdots \cdots (16)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{en} &= \begin{bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{el} = \begin{bmatrix} g_{1l} & g_{2l} \end{bmatrix} \\ g_{1l} &= -d_{1m} J_1(d_{1m} r_0) - H_0 J_0(d_{1m} r_0) \\ g_{2l} &= -d_{1m} Y_1(d_{1m} r_0) - H_0 Y_0(d_{1m} r_0) \\ \mathbf{E}_{ei} &= \mathbf{C}_{ei}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{ei+1} \\ \mathbf{C}_{ei} &= \begin{bmatrix} J_0(d_{im} r_i) & Y_0(d_{im} r_i) \\ -\lambda_i d_{im} J_1(d_{im} r_i) & -\lambda_i d_{im} Y_1(d_{im} r_i) \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{ei+1} &= \begin{bmatrix} J_0(d_{i+1m} r_i) & Y_0(d_{i+1m} r_i) \\ -\lambda_{i+1} d_{i+1m} J_1(d_{i+1m} r_i) & -\lambda_{i+1} d_{i+1m} Y_1(d_{i+1m} r_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式(7)は式(16)の無限個の正根について総和をとる.

さて, 式(10)の解である固有関数  $X_{im}(r)$  は, 不連続な重み関数に対して, 次式の直交関係を満足する.

$$\sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\lambda_i}{\kappa_i} r X_{im}(r) X_{ik}(r) dr = \begin{cases} \text{const.} & (m=k) \\ 0 & (m \neq k) \end{cases} \dots\dots (18)$$

式(6),(7)より  $t=0$  において次式のようにおく.

$$G_i(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(0) X_{im}(r) = - \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) P_j(0) \dots\dots\dots (19)$$

式(18)の直交関係により  $G_i(r)$ ,  $L_{ij}(r)$ ,  $Q(r)$  は次式のように級数表示できる.

$$\left. \begin{aligned} G_i(r) &= \sum_{m=1}^{\infty} g_m X_{im}(r), \quad L_{ij}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} l_{mj} X_{im}(r) \\ \frac{\kappa_i}{\lambda_i} Q(r) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m X_{im}(r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} g_m &= M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r G_i(r) X_{im}(r) dr \\ l_{mj} &= M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r L_{ij}(r) X_{im}(r) dr \\ q_m &= M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r Q(r) X_{im}(r) dr \\ M_m &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式(7),(20)を式(2)に代入し, 式(9),(10)を考慮すれば,

$\varphi_m(t)$  に関する次の微分方程式が得られる.

$$\varphi_m(t)_{,t} + \gamma_m^2 \varphi_m(t) = q_m - \sum_{j=1}^2 l_{mj} P_j(t)_{,t} \dots\dots\dots (22)$$

さらに, 式(19),(20)より

$$\varphi_m(0) = g_m \dots\dots\dots (23)$$

式(22),(23)の解  $\varphi_m(t)$  は次式のように得られる.

$$\varphi_m(t) = e^{-\gamma_m^2 t} \left\{ g_m + \int_0^t e^{\gamma_m^2 t'} \left( q_m - \sum_{j=1}^2 l_{mj} \frac{dP_j(t')}{dt'} \right) dt' \right\} \dots\dots (24)$$

以上, 式(11)と式(12)を式(7)に代入すると所要の温度関数  $T_i^*(r, t)$  は次式のように得られる.

$$\begin{aligned} T_i^*(r, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) A_{nm} \{ \overline{A_{im}} J_0(d_{im} r) + \overline{B_{im}} Y_0(d_{im} r) \} \\ &+ \sum_{j=1}^2 \{ C_{ij} J_0(g_i r) + D_{ij} K_0(g_i r) \} P_j(t) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ただし,  $\gamma_m^2 / \kappa_i \leq (B_{ui} + B_{li}) / r_n^2 b \lambda_i$  の場合は式(12)の代わりに式(13)を使用する. また  $P_j(t)$ ,  $\varphi_m(t)$  はそれぞれ式(8), (24)に与えられている.

## 2.2 断続的熱負荷による温度場

時間に関して一定の熱負荷がかかった場合の第  $i$  層の温度場の式(25)を利用して, 熱サイクルを負荷した場合を想定した図2のような断続的な熱負荷がある傾斜機能材料円板の非定常温度関数  $\hat{T}_i(r, t)$  を導出する. 第1回目の熱負荷後の冷却期間  $t_1' \sim t_2$  における第  $i$  層の温度関数  $\hat{T}_i(r, t)$  は, 初期温度が  $T_i^{*1}(r, t_1')$  で, 円板の外径付近に  $q$  なる熱負荷がある場合の温度関数  $T_i^{*1}(r, t)$  と  $t = t_1'$  において温度0で,  $q$  なる熱吸収がある場合の温度関数  $-T_i^{*1}(r, t - t_1')$  の和で得られる.

$$\hat{T}_i(r, t) = T_i^{*1}(r, t) - T_i^{*1}(r, t - t_1') \dots\dots\dots (26)$$

ただし, 上添え字1は断続的熱負荷のサイクル数を示し,  $T_i^{*1}(r, t_1')$  は式(25)の  $T_i^*(r, t)$  に  $t = t_1'$  を代入して得られる. さらに時刻  $t_2$  から2回目の熱負荷がある場合の温度関数は, 次式で表される.

$$\hat{T}_i(r, t) = T_i^{*1}(r, t) - T_i^{*1}(r, t - t_1') + T_i^{*2}(r, t - t_2) \dots\dots (27)$$

このように,  $k$  回目の熱負荷期間  $t_k \sim t_{k+1}'$  における温度関数は次式で得られ,

$$\hat{T}_i(r, t) = \hat{T}_i^*(r, t) + \hat{T}_i^{*k}(r, t - t_k) \dots\dots\dots (28)$$

$k$  回目の冷却期間  $t_k' \sim t_{k+1}$  における温度関数は次式となる.

$$\hat{T}_i(r, t) = \hat{T}_i^*(r, t) + T_i^{*k}(r, t - t_k) - T_i^{*k}(r, t - t_k') \dots\dots (29)$$

ただし,  $\hat{T}_i^*(r, t)$  は,  $k$  回目の熱負荷を受ける前の傾斜機能材料円板の温度を示す.

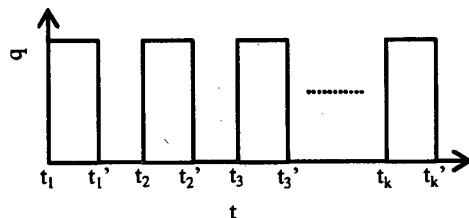


Fig.2 Intermittent heat load

## 3. 非定常温度場を受ける回転円板の応力解析

ある一定の角速度  $\omega$  で回転し, 軸対称非定常温度場を受ける薄い不均質中空円板の平面応力問題の近似解析解を導出する. この場合, 所要の応力成分は次式の

ように2つの応力場の重ね合わせにより得られる。

$$\sigma_r = \sigma_r^1 + \sigma_r^2, \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^1 + \sigma_{\theta\theta}^2 \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 $\sigma_{ij}^1$ は熱応力、 $\sigma_{ij}^2$ は一定の角速度 $\omega$ で回転する円板の遠心力(物体力)による応力である。

まず、平面熱応力問題のフックの法則を半径方向変位 $U_r^1$ で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (U_{r,r}^1 + \nu r^{-1} U_r^1) - \frac{E}{1-\nu} \alpha T^* \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (r^{-1} U_r^1 + \nu U_{r,r}^1) - \frac{E}{1-\nu} \alpha T^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 $E=E(r)$ 、 $\alpha=\alpha(r)$ はヤング率、線膨張係数であり、ポアソン比 $\nu$ は一定値と仮定した。また、 $T^*$ は $T-T_\infty$ で表される温度変化量である。前報<sup>(5)</sup>より得られた、線膨張係数とヤング率の温度依存性が弾性の熱応力分布に及ぼす影響は小さいという結果より、ここでは、物性値の温度依存性は考慮しない。

次に、中心軸のまわりに一定の角速度で回転する一様な厚さを持つ円板の平面応力問題について考える。この場合のフックの法則を半径方向変位 $U_r^2$ で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (U_{r,r}^2 + \nu r^{-1} U_r^2) \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (r^{-1} U_r^2 + \nu U_{r,r}^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

式(31),(32)を平衡方程式に代入すると、半径方向変位 $U_r^1$ 、 $U_r^2$ の満足すべき微分方程式を次式のように得る。

$$\begin{aligned} &U_{r,r} + f_1(r)r^{-1}U_{r,r} + g_1(r)r^{-2}U_r \\ &= \begin{cases} (1+\nu) \left\{ \frac{E_r}{E} \alpha T^* + \alpha_r T^* + \alpha T_r^* \right\}, & (U_r = U_r^1) \\ -\frac{w\omega^2 r}{Eg}(1-\nu^2), & (U_r = U_r^2) \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、 $w=w(r)$ 、 $\omega$ 、 $g$ は比重量、角速度、重力加速度であり、

$$f_1(r) = rE_r/E + 1, g_1(r) = \nu rE_r/E - 1 \dots\dots\dots (34)$$

式(33)は変数係数2階線形微分方程式であるが、傾斜機能材料のような任意のヤング率の不均質性に対して厳密解を求めることは不可能である。そこで、温度解析と同様に円板を半径方向に $n$ 分割し、各領域の $f_1(r)$ 、 $g_1(r)$ をそれぞれ相異なる一定値 $f_{1j}$ 、 $g_{1j}$ ( $j=1,2,\dots,n$ )で近似する。この場合、第 $j$ 領域の変位 $U_{rj}^1$ 、 $U_{rj}^2$ は次式のEuler型微分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} &U_{rj,r} + f_{1j}r^{-1}U_{rj,r} + g_{1j}r^{-2}U_{rj} \\ &= \begin{cases} (1+\nu) \left\{ \frac{E_r}{E} \alpha T^* + \alpha_r T^* + \alpha T_r^* \right\}, & (U_{rj} = U_{rj}^1) \\ -\frac{w\omega^2 r}{Eg}(1-\nu^2), & (U_{rj} = U_{rj}^2) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots (35)$$

この微分方程式の一般解は、次式のように得られる。

$$U_{rj}^1 = C_{1j}r^{\xi_{j1}} + C_{2j}r^{\xi_{j2}} + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1+\nu}{\xi_{j1} - \xi_{j2}} \times r^{\xi_{jk}} \int_{r_0}^r r^{1-\xi_{jk}} \left\{ \frac{E_r}{E} \alpha T^* + \alpha_r T^* + \alpha T_r^* \right\} dr \quad (36)$$

$$U_{rj}^2 = C_{1j}^*r^{\xi_{j1}} + C_{2j}^*r^{\xi_{j2}} + \frac{\omega^2(1-\nu^2)}{g(\xi_{j2} - \xi_{j1})} \sum_{k=1}^2 r^{\xi_{jk}} (-1)^k \int_{r_0}^r \frac{pr^{2-\xi_{jk}}}{E} dr \quad \dots\dots (37)$$

ただし、 $\xi_{j1}$ 、 $\xi_{j2}$ は次式の相異なる2実根である。

$$x^2 + (f_{1j} - 1)x - g_{1j} = 0 \dots\dots\dots (38)$$

式(36),(37)を式(31),(32)に代入すると、応力成分式は、

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta j}^1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^2 (1+\xi_{jk}\nu)r^{\xi_{jk}-1} \left[ C_{kj} + (-1)^{k-1} \frac{1+\nu}{\xi_{j1} - \xi_{j2}} \right. \\ &\times \left. \int_{r_0}^r r^{1-\xi_{jk}} \left\{ \frac{E_r}{E} \alpha T^* + \alpha_r T^* + \alpha T_r^* \right\} dr \right] - \frac{E}{1-\nu^2} \alpha T^* \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta j}^2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^2 (1+\xi_{jk}\nu)r^{\xi_{jk}-1} \left\{ C_{kj}^* + (-1)^{k-1} \right. \\ &\times \left. \frac{\omega^2(1-\nu^2)}{(\xi_{j2} - \xi_{j1})g} \int_{r_0}^r \frac{pr^{2-\xi_{jk}}}{E} dr \right\} \quad \dots\dots (40) \end{aligned}$$

$\sigma_{rj}^1$ 、 $\sigma_{rj}^2$ の式は、 $\sigma_{\theta\theta j}^1$ 、 $\sigma_{\theta\theta j}^2$ の式の $\sum_{k=1}^2$ のあとの

$(1+\xi_{jk}\nu)$ を $(\xi_{jk}+\nu)$ で置換するだけで得られる。

回転中空円板は内側面変位拘束、外側面応力自由であるとする、力学的境界条件および連続条件は

$$\left. \begin{aligned} U_{r1} &= 0 & (r=r_0) \\ \sigma_{rm} &= 0 & (r=r_n) \\ \sigma_{rj} &= \sigma_{rj+1}, U_{rj} = U_{rj+1} & (r=r_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

式(39),(40)に含まれる未知係数 $C_{1j}$ 、 $C_{2j}$ 、 $C_{1j}^*$ 、 $C_{2j}^*$ は式(41)から決定される。

#### 4. 数値計算と考察

図2において、各回の熱負荷期間、冷却期間の長さはそれぞれ一定の $t_h$ 、 $t_c$ であるとして、次式の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= r/r_n, \tau = \kappa_0 t/r_n^2, \tau_h = \kappa_0 t_h/r_n^2 \\ \tau_c &= \kappa_0 t_c/r_n^2, \bar{T}_i(\zeta, \tau) = T_i(r, t)/T_{n\infty} \\ B_{in} &= h_{in}r_n/\lambda_0, B_{out} = h_{out}r_n/\lambda_0 \\ \bar{\sigma}_{ij}^1 &= \sigma_{ij}^1/E_0\alpha_0T_{n\infty} \\ \bar{\sigma}_{ij}^2 &= \sigma_{ij}^2/g_0\omega^2r_n^2 \\ \bar{Q} &= Qr_n^2/T_{n\infty}\lambda_0 \end{aligned} \right\} \quad (i,j=r,\theta) \quad \dots\dots (42)$$

ここで、 $B_{in}$ 、 $B_{out}$ はビオ一数、 $\kappa_0$ 、 $E_0$ 、 $\alpha_0$ 、 $w_0$ はそれぞれ、ある代表の温度伝導率、ヤング率、線膨張係数、比重量であり、 $T_{n\infty}$ は外側面における周囲媒体の定常温度である。また、内外側面周囲媒体温度を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{in}^*(t) &= \theta_{in}(t) - T_{\infty} = T_{in}(1 - e^{-t/\tau}) - T_{\infty} \\ \theta_{out}^*(t) &= \theta_{out}(t) - T_{\infty} = T_{out}(1 - e^{-t/\tau}) - T_{\infty} \end{aligned} \right\} \dots\dots (43)$$

また、式(25)の  $\sum_{m=1}^{\infty}$  を  $\sum_{m=1}^{30}$  で近似した。

熱伝達率の半径方向変化は前報<sup>(5)</sup>と同様、廣瀬ら<sup>(7)</sup>が報告した180rpmで回転する回転円板上の空気の局所熱伝達率分布から算出したものを用い、円板上下面で同一と仮定した。

文献<sup>(1)</sup>のディスク形状と熱負荷条件を模擬して、以下のような数値計算諸元を採用した。

$$\left. \begin{aligned} \bar{b} &= 0.05, T_{\infty}/T_{n\infty} = 0, T_{in}/T_{n\infty} = 0, B_{in} = B_{out} = 1 \\ \tau_x &= \kappa_0 t_x / r_n^2 = 1, \tau_s = \kappa_0 t_s / r_n^2 = 1, \bar{Q} = 200 \\ r_N / r_n &= 0.73, \tau_h = \tau_c = 1, n = 20, v = 0.3 \\ r_0 / r_n &= 0.1, E_0 \alpha_0 T_{n\infty} / (w_0 \omega^2 r_n^2 / g) = 60 \end{aligned} \right\} (44)$$

円板の材料としては、まず、高温になるブレーキパッドとの摺動面（以下、フランジ部と呼ぶ）より内半径側において、軽量化のために、現在のブレーキディスクに用いられている SUS410<sup>(1)</sup>より密度の小さいチタン合金 Ti+6Al+4V を使用し、Ti+6Al+4V/SUS410 傾斜機能材料として設計した。しかし、このような設計では熱応力緩和効果があまり得られなかったため、次にフランジ部には SUS410 と高温に強いセラミック材料として部分安定化ジルコニア(PSZ)を用い、それより内半径側では Ti+6Al+4V を用いた設計を試みた。PSZ

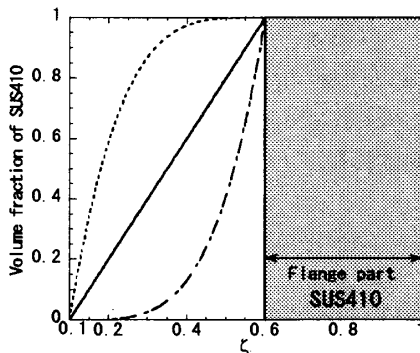


Fig.3 Volume fraction distribution for a design with two materials

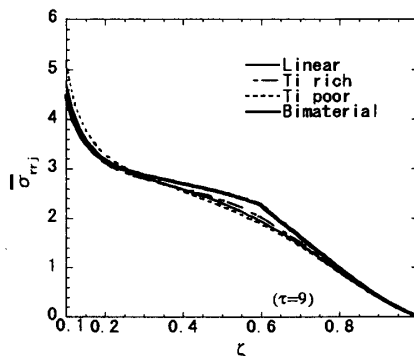


Fig.5 Transient thermal stress distribution for Ti+6Al+4V/SUS410 FGM

を採用した理由は、PSZ はセラミックの中で最も靱性が大きく、高強度の材料であるということ、線膨張係数が SUS410 よりも小さいため、チタン合金と SUS410 をただ貼り合わせた界面における線膨張係数のミスマッチを小さくでき、また軽量化もできるからである。表 1 に使用した材料物性値を示す。

Table 1 Material properties<sup>(8),(9),(10)</sup>

	SUS410	PSZ	Ti+6Al+4V
Thermal Conductivity $\lambda$ [W/(m · K)]	24.91	1.67	8.0
Young's Modulus E [GPa]	200	211	109
Coefficient of Linear Thermal Expansion $\alpha \times 10^{-6}$ [1/K]	11.7	2.93	8.40
Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7750	5730	4430
Specific Heat c [kJ/(kg · K)]	0.461	0.467	0.510

4.1 Ti+6Al+4V と SUS410 を用いた場合 図 3 に SUS410 の体積分率分布を示す。図のように、傾斜組成を線形、Ti リッチ、Ti プア、貼り合わせ材の 4 パターンについて計算した。なお、材料特性は線形複合則から決定した。

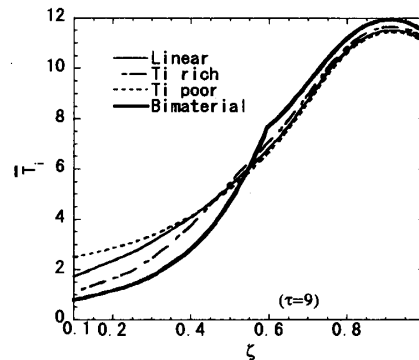


Fig.4 Transient temperature distribution for Ti+6Al+4V/SUS410 FGM

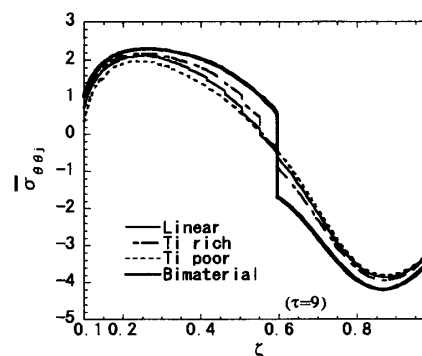


Fig.6 Transient thermal stress distribution for Ti+6Al+4V/SUS410 FGM

図4, 図5, 図6はそれぞれ $\tau=9$ 即ち, 5回目の熱負荷終了直後の温度分布, 半径方向熱応力分布, 円周方向熱応力分布である。これらの結果を見ると, チタン合金と SUS410 をただ貼り合わせた円板と比較して, 傾斜化による熱応力緩和効果は小さいと言える。

表2は SUS410均質円板の重量を1として考えた相対重量を示したものである。飾り窓を有する円板が0.85であるが, 傾斜化によってこれよりも軽量化することはできなかった。

Table 2 Comparison of weight

Composition pattern	Relative weight
SUS410 homo.	1.0
SUS410 homo. (※)	0.85
Bimaterial	0.85
Linear	0.94
Ti-6Al-4V rich	0.89
Ti-6Al-4V poor	0.98

(※) A disk having eyebrow-shaped holes

#### 4.2 Ti+6Al+4V, PSZ と SUS410 を用いた場合

内半径上での大きな引張応力とフランジ部の大きな圧縮応力を緩和させ, かつ軽くするために図7のような材料設計を試みた。組成分布をこの図のようにフランジ部より内半径側はチタン合金100%とし, フランジ部は SUS410 と PSZ を使い, PSZ を多くしたセラミックリッチ (一点鎖線) と PSZ を少なくしたセラミックプア (破線) の2パターンを考えた。チタン合金との接合面では, 線膨張係数の差を小さくするため, 体積分率を SUS410:60%, PSZ:40%とした。

図8は $\tau=9$ における温度分布である。この図を見ると, PSZ を混ぜた場合, PSZ の熱伝導率が SUS410 よりも小さいために, フランジ部の最高温度は高くなったが, チタン合金を使用している内半径側での温度は低下したので, この部分の強度を考えた場合に耐熱性が改善されたと言える。

図9, 10 はそれぞれ $\tau=9$ における半径方向熱応力と, 円周方向熱応力の分布である。半径方向熱応力では, セラミック材料を多くすればするほど引張応力が緩和され, セラミックリッチでは貼り合わせ材よりも内半径上で約42%緩和されている。円周方向熱応力においては, 降伏現象の原因となるフランジ部での圧縮応力は貼り合わせ材が最も大きいのに対し, セラミックリッチにすると最大圧縮応力が約38%緩和されている。

表3にこの場合の相対重量を示す。表2とあわせて

重量比較すれば, セラミックを加えることで貼り合わせ材よりも軽くなり, セラミックリッチにおいては現存の飾り窓有りディスクよりも約12%軽くなる。

Table 3 Comparison of weight

Composition pattern	Relative weight
Ceramic rich	0.75
Ceramic poor	0.81

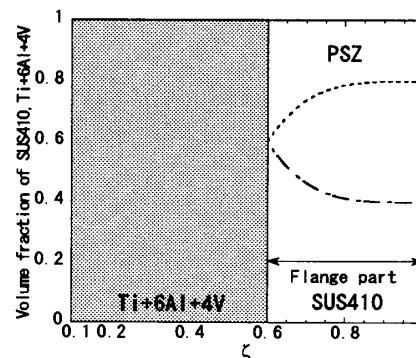


Fig.7 Volume fraction distribution for a design with three materials

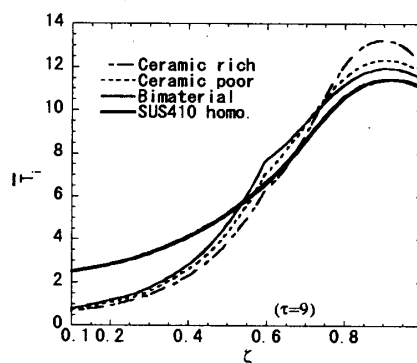


Fig.8 Transient temperature distribution for Ti+6Al+4V and PSZ/SUS410 FGM

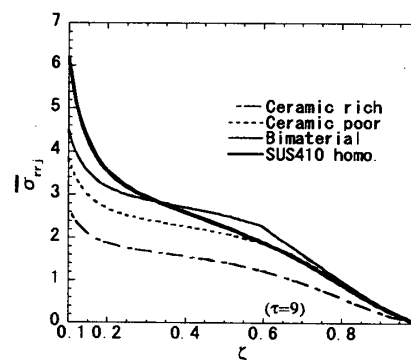


Fig.9 Transient thermal stress distribution for Ti+6Al+4V and PSZ/SUS410 FGM

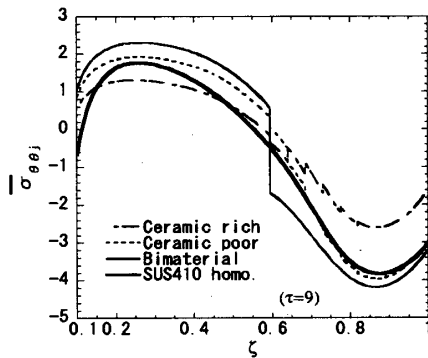


Fig.10 Transient thermal stress distribution for Ti+6Al+4V and PSZ/SUS410 FGM

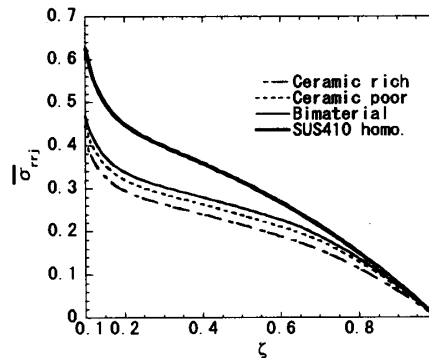


Fig.11 Centrifugal stress distribution for Ti+6Al+4V and PSZ/SUS410 FGM

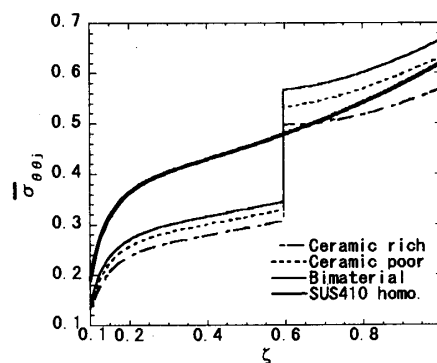


Fig.12 Centrifugal stress distribution for Ti+6Al+4V and PSZ/SUS410 FGM

図 11,12 は回転遠心力による応力分布で、それぞれ半径方向応力、円周方向応力について示したものである。半径方向応力の分布は SUS410 均質の場合を除くと、組成分布の違いによって最大引張応力に大きな差は見られない。これは内半径側の材料組成が同じであるためと考えられる。円周方向熱応力では、チタン合金と SUS410/PSZ 傾斜層との接合面において密度の違いにより大きな引張応力の不連続性を示しているが、セラミックリッチの場合は最大引張応力が SUS410 均質の場合より約 8% 緩和されている。

## 5. 結 言

大型自動二輪のディスクブレーキに傾斜機能材料を使用した材料設計を念頭に置き、任意の不均質性を有する傾斜機能材料からなる中空円板を均質多層円板として近似し、断続的な熱負荷を受ける場合の非定常熱伝導問題、および平面熱応力問題を熱伝達率の場所による変化を考慮して解析する方法を示した。また、数値計算例として傾斜機能材料からなる回転円板の 2 つの場合について材料設計を行い、組成分布の相違による放熱性と熱応力の緩和、遠心力による応力に及ぼす影響について考察し、次の結論を得た。

- (1) SUS410/Ti+6Al+4V 傾斜機能材料円板の場合、SUS410 と Ti+6Al+4V の貼り合わせ円板と比較して熱応力緩和効果は小さい。
- (2) SUS410/PSZ/Ti+6Al+4V 傾斜機能材料円板の場合、
  - ① フランジ部の温度は貼り合わせ円板の場合より高温だが、チタン合金部分の温度は低下する。
  - ② フランジ部においてセラミックリッチな組成分布にすると、円板内周に生じる最大引張応力、外周近辺に生じる最大圧縮応力ともに大きく緩和される。また、軽量性にも優れ、遠心力による最大引張応力も緩和できる。

## 文 献

- (1) 笹田・藤井・亀田, 機論, 65-637,C(1999),3824.
- (2) 岩田・吉田, 機論, 58-547,C(1992),684.
- (3) 斎藤・鍵和田, 機論, 44-386(1978),3622.
- (4) Y. Sugano, Int. J. Eng. Sci., 21-10(1983),1203.
- (5) 菅野・千葉・廣瀬, 機論, 67-655,A(2001),542.
- (6) 菅野・森下・田中, 機論, 59-567,A(1993),2666.
- (7) 廣瀬・横山・大内, 機論, 61-590,B(1995),3770.
- (8) 渡辺・向井, ステンレス鋼の溶接, 日刊工業新聞社, (1981),25.
- (9) 加藤・前川・小野, 機械材料学, 朝倉書店, (1995),169.
- (10) 菅野・佐藤・須見, 機論, 63-606,A(1997),378.