

論 文

通常のニューロンから成るカオス・ニューラルネットワーク
の最小構成川村 暁^{†a)} 吉田 等明^{††} 三浦 守[†]

Minimum Constituents of Chaos Neural Network

Composed of Conventional Neurons

Satoshi KAWAMURA^{†a)}, Hitoaki YOSHIDA^{††}, and Mamoru MIURA[†]

あらまし 出力がカオスであるニューラルネットワークについての研究は多数なされているが、それらは、カオス応答のために特別に設計されたニューロンモデルやネットワークモデルを用いており、一般的なモデルを用いた研究はほとんど行われていない。本論文では、ホップフィールドネットワークなどで通常用いられるニューロンモデルにより構成されたニューラルネットワークの振動現象について検討した。その結果、2個のニューロンから成るネットワークにおける動作状態は、収束または周期振動のいずれかであることを理論的かつ実験的に明らかにした。次に、3個のニューロンから成るネットワークにおける実験的検討を行い、収束から周期振動、準周期振動及びカオスに至る動作状態が存在することを明らかにした。このことから、一般的なニューロンモデルにより構成されたニューラルネットワークでは、3個のニューロンから成るネットワークがカオスを発生する最小構成であることを示した。

キーワード カオス、ニューラルネットワーク、分岐図、ポアンカレ切断面、リアプノフ指数

1. ま え が き

生物の神経系において様々な振動現象 [1]~[3] が存在することが示されている。単一のニューロンにおける非線形振動としては、カオス応答をするイソアワモチの自発発電ニューロンに関する研究 [3] や、ヤリイカ巨大軸索の自発発振現象 [4] があげられる。単一のニューロンではなく、神経回路網全体がカオス応答をしているという研究例も報告されている [3], [5]~[7]。また、人工ニューロンや人工ニューラルネットワーク (以下 ANN) の出力における振動現象やカオスに関する研究が行われており [8]~[15]、自己再帰のないニューロンモデルからなる環状の ANN は、周期振動を呈す

ることが知られている [11], [12]。他方、カオス応答の ANN は、特別なニューロンモデルやネットワーク構成を用いているものがほとんどである。合原らは、カオスを発生するように構成したニューロンモデル (カオスニューロン) を提案している [4], [8], [15]~[17]。また、Lipo Wang らは、外部入力値が確率的に変動する条件下で、ANN がカオス応答を示している [18]~[21]。特別なネットワーク構成におけるカオスの出現に関する統計力学からの解析を行った研究もある [13], [14]。

これらの研究に対し筆者らは、ホップフィールドネットワークや誤差逆伝搬学習則等で用いる、自己再帰のない一般的なニューロンモデルを用いた ANN を構成し、その振動現象について研究を行ってきた。すなわち、ANN の振動現象はその構造に起因するものであることを明らかにするなど、振動の発生機構について考察してきた [22]~[25]。また、ネットワーク構造の規則性・調和性に着目し、鏡像異性 (chirality) の概念 [26] を用いて ANN の分類と新たなネットワーク構成の検討を行ってきた。その結果、4個のニューロ

[†] 岩手大学工学部情報システム工学科, 盛岡市
Department of Computer and Information Science, Faculty of Engineering, Iwate University, Morioka-shi, 020-8551 Japan

^{††} 岩手大学情報処理センター, 盛岡市
Iwate University Computer Center, Morioka-shi, 020-8550 Japan

a) E-mail: kawamura@cis.iwate-u.ac.jp

ンから成る ANN は、カオス応答をする場合があることを既に報告した [27]~[29]. このように、一般的なニューロンモデルを用いた ANN においてカオス応答をするネットワークを、筆者らはカオス・ニューラルネットワーク (CNN) と呼んでいる [30], [31].

本論文では、CNN が 3 個のニューロンから成る ANN において実現されることを示す。また、この構成が CNN の最小構成であることを明らかにする。

2. ニューロンモデル

本論文で用いたニューロンモデルを図 1 及び式 (1) から式 (3) に示す。

$$y_j(m) = f_s(u_j) = 1 / \{1 + \exp(-u_j/\Lambda)\} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i(m-1) + \theta_j + I_j \right) / \Lambda \right\}} \quad (2)$$

$$u_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} x_i(m-1) + \theta_j + I_j \quad (3)$$

ここで、式 (1) で表される非線形出力関数 f_s は特異な関数ではなく、一般的に用いられる sigmoid 関数である。また、その関数の傾き係数 Λ はすべて 1 としている。その他の各係数は、以下のように定義する。

$y_j(m)$: 時刻 m におけるニューロン j の出力。

なお、 m は離散値であり、 $m = 0, 1, 2, \dots$

x_j : ニューロン j の内部状態。

$x_i(m)$: 時刻 m におけるニューロン i からの入力。

w_{ij} : ニューロン i からニューロン j への結合荷重。

θ_j : ニューロン j のしきい値。

I_j : ニューロン j への外部入力値。

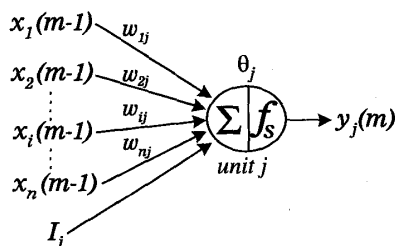


図 1 人工ニューロンモデル
Fig. 1 Artificial neuron model.

3. 計算機実験で用いた概念

ANN の振動現象を計算機実験により調べる際、ANN の振舞いを同定する必要がある。本章では、この同定のために用いた方法を記す。

3.1 分岐図

分岐図 (bifurcation diagram) とは、パラメータ μ の値に対して f_μ の定義域にある点の時間変化を描き、写像の繰返し振舞いを図で理解できるようにしたものである [4], [33].

本論文では、横軸に外部入力値 I , 縦軸にニューロンの出力値を示す。これは、ある外部入力値 I を入力し続けたときの、ニューロンの出力の様子を表す。初期の過渡的な状態を除くため、1000 時間ステップ動作後の出力をプロットしている。分岐図で、点の密度が高い場合がある。このような部分は、ANN が特異な状態にあると考えられる。

3.2 ポアンカレ切断面

ポアンカレ切断面 (Poincaré section map またはリカレンスプロット) とは、観測された時系列データから、力学系のアトラクタを再構成する操作により得られる集合である [3], [4], [16], [17], [32]~[36].

本論文では、具体的な再構成手法として、時系列データ $y(m)$ を、時間遅れ座標系 $[y(m), y(m+1)]$ へ変換する操作により再構成された状態空間上へ埋め込む方法を用いた [17], [32]. 初期の過渡的な状態を除くため、10000 時間ステップ動作後の状態をプロットしている。これにより、時系列データからは直接推測することが困難な本来の力学系に関する情報を得ることができる。ANN の出力がカオスである場合、ポアンカレ切断面には、ストレンジアトラクタと呼ばれるカオス特有のアトラクタが観測され、自己相似 (フラクタル) 構造が内在するような構造であることが多い^(注1)。

3.3 リアプノフ指数

系の状態を量的に計る指標として、カオス特有の軌道不安定性の指標であるリアプノフ指数を用いた [4], [16], [17], [32]~[36]. カオスでは初期値の微小なずれ $\epsilon(0)$ が、 $\epsilon(m) = \epsilon(0)e^{\lambda m}$ で表されるように指数関数的に拡大する。ここに、 λ はリアプノフ指数で

(注1): アトラクタの形状と振舞いの関係は、以下のように書ける。

- 唯一の点の場合、収束。
- 有限個の点の場合、有限の周期振動。
- 単純な閉曲線の場合、準周期振動。
- ストレンジアトラクタの場合、カオス。

ある. 1次元力学系に対するリアプノフ指数は次式で表される [33].

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f^{[n]})'(x)|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)| \quad (4)$$

ここで $x_0 = x$ とし, $k = 1, 2, \dots$ に対して $x_k = f^{[k]}(x)$ である.

多次元の力学系 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ の場合, 式 (4) ではリアプノフ指数は求められない. 本論文では, 文献 [37]~[39] の方法に基づく次式の方法でリアプノフ指数の計算を行った.

$$\lambda(x, \mathbf{v}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\mathbf{DF}^n(\mathbf{x})[\mathbf{v}]\| \quad (5)$$

ここで, \mathbf{DF} はヤコビアン行列, $\|\cdot\|$ は行列 \cdot のノルム, \mathbf{v} は接ベクトルである. 対象とする系がカオスであるとき, 同指数は正の値となる. これに対して, ネットワークが準周期 (2重周期) 振動の場合 0 となり, 周期振動の場合負の値をとる.

なお, 実験結果で示すグラフは, 最大リアプノフ指数を表すものとする.

4. 基本振動ニューラルネットワーク

ニューロンモデルによっては単一のニューロンで出力が振動する場合もある [4], [8], [16], [17] が, 本研究で用いたモデルでは自己再帰結合がないため, 単一のニューロンでは出力は振動せず一定値となる. 出力が振動するネットワークの最小構成として, 図 2 に示すような 2 個のニューロン N_1, N_2 から成る ANN を考える. このネットワークを基本振動ニューラルネットワーク (以下基本振動 NN) と呼ぶことにする.

基本振動 NN は, 結合荷重の正負によってその振舞いに変化すると考えられるので, これを表 1 のように分類する. 興奮性結合のみの場合をタイプ E, 抑制性結合のみの場合をタイプ I, 興奮性と抑制性の両結合がある場合をタイプ H と呼ぶことにする. なお,

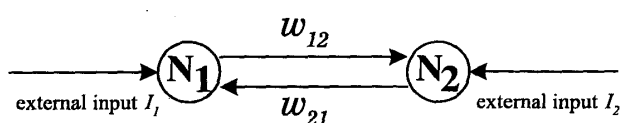


図 2 基本振動ニューラルネットワーク
Fig. 2 Basic oscillation neural networks.

$w_{12} < 0, w_{21} > 0$ の場合も考えられるが, これはタイプ H と等価である.

4.1 基本振動 NN の計算機実験結果

基本振動 NN についての実験結果, いずれのタイプ (タイプ E, タイプ H, タイプ I) においても, それらの出力は収束または有限周期の振動であった. 図 2 において, 結合荷重 w_{12} と w_{21} の絶対値は 10 とし, しきい値 θ は 0 の場合と 0 以外の場合で調べた. 収束した場合の分岐図の例を図 3 に, 周期振動した場合の分岐図の例を図 4 に示す. なお, 計算機実験で示すそれぞれの図は, ニューロン N_1 の出力に対するものである. また, 外部入力値は, $I_1 = I_2 = I$ とする.

表 1 基本振動ニューラルネットワークの分類
Table 1 Classification of the basic oscillation neural networks.

タイプ	結合荷重 w_{12}, w_{21}	特徴
E	$> 0, > 0$	興奮性結合のみ
H	$> 0, < 0$	興奮・抑制性両方の結合
I	$< 0, < 0$	抑制性結合のみ

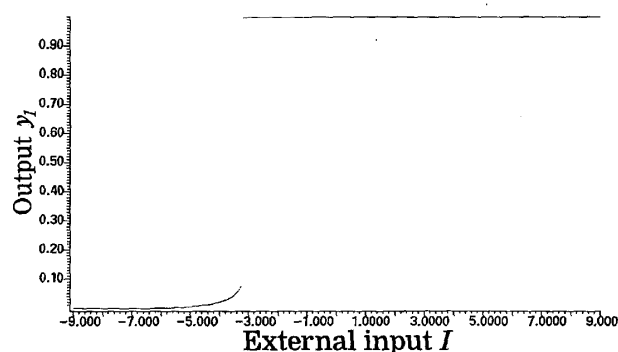


図 3 分岐図 (収束の場合)
Fig. 3 Bifurcation diagram in case of convergence.

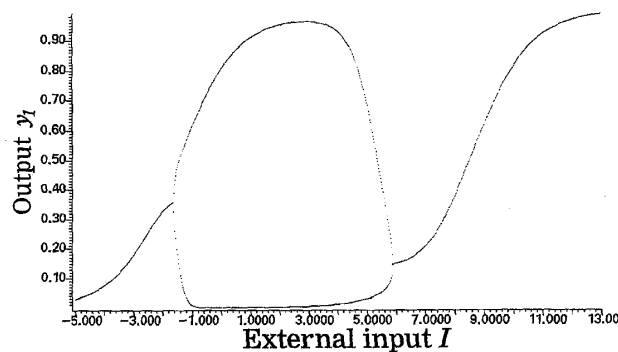


図 4 分岐図 (周期振動の場合)
Fig. 4 Bifurcation diagram in case of periodic oscillation.

計算機実験では、基本振動 NN は特異な振舞いをする場合は見られなかった。

次に、基本振動 NN の特性について理論的に考察する。

4.2 基本振動 NN の性質

本研究では、結合荷重の大きさ、各ニューロンへの外部入力値及び sigmoid 関数の傾き係数は同一の値を用いている。よって、基本振動 NN は、sigmoid 関数による写像を繰り返し行っている力学系と考えられる。特に、二つの結合荷重 w_{12}, w_{21} の値が同じ場合は、単一の写像による力学系とみなすことができる。

はじめに、ニューロンの出力関数として用いた sigmoid 関数 (式 (1)) を一般化して式 (6) のように表し、その性質について考える。

$$f_s(x) = \frac{1}{1 + \exp(-Qx)} \quad (6)$$

ここで、 $Q \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$ とする。なお、 \mathbf{R} は実数全体の集合である。式 (6) の x に関する 1 次微分は式 (7) となる。

$$f_s'(x) = \frac{Q}{\exp(Qx)\{1 + \exp(-Qx)\}^2} \quad (7)$$

[性質 1] 単調関数

$x \in \mathbf{R}$ とする。このとき、式 (7) の分母は正である。よって、 $f_s'(x)$ は Q の値にのみ依存し、 $Q > 0$ のとき $f_s'(x) > 0$ 、 $Q < 0$ のとき $f_s'(x) < 0$ となる。よって、 $f_s(x)$ は単調関数である。

[性質 2] 有界

ある $x \in \mathbf{R}$ において、 $f_s(x)$ は $x : x \in \mathbf{R} \rightarrow (0, 1)$ なる有界な写像である。

以上により、sigmoid 関数 f_s は有界かつ単調関数であることは明らかである。

これらの性質に加え、以下の命題の証明のために、微積分学で知られている次の定理 [33], [40], [41] を示す。

[定理 1] 1次元写像の系列の振舞い [33], [40], [41]

$\{x_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ を結局的に減少または増加する系列^(注2)であるとし、 $\{x_n\}$ は下または上に有界であると仮定する。このとき、系列は収束する。すなわち、ある実数 $z : z \in \mathbf{R}$ が存在して、 $n \rightarrow \infty$ につれ $x_n \rightarrow z$ が成り立つ。

以上の [性質 1] [性質 2] 及び [定理 1] を用いて、下記の [命題 1] を証明する。[命題 1] により、タイプ E の場合が説明できる。なお、以下の証明において、変数 x に関数 f_s を施す操作 ($f_s(x)$) を f_s 、関数 f_s を

複数回施して合成積を得る操作 (convolution) を \circ で表記する。

[命題 1] 繰返し写像 f_1 を、 $Q > 0$ の場合の sigmoid 関数 f_s とする ($f_1 = f_s, Q > 0$)。 f_1 の繰返し写像 $x_{n+1} = f_1(x_n)$ は周期点をもたず、ある実数 $z : z \in \mathbf{R}$ に収束する。

(証明) 繰返し写像 f_1 における、写像の系列 $\{x_n\}$ について考える。 f_1 は単調増加関数であるから、写像の系列は、式 (8) または式 (9) を満たす。

$$\text{単調増加列} : x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \quad (8)$$

$$\text{単調減少列} : x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1} > x_n \quad (9)$$

また、 f_1 は sigmoid 関数の [性質 2] より上にも下にも有界な写像である。

ゆえに、[定理 1] より、 f_1 による繰返し写像 $x_{n+1} = f_1(x_n)$ の系列 $\{x_n\}$ は、周期点をもたず、ある実数 $z : z \in \mathbf{R}$ に収束する。 □

次に、下記の [命題 2] を証明する。[命題 2] により、タイプ I の場合が説明できる。

[命題 2] 繰返し写像 f_2 を、 $Q < 0$ の場合の sigmoid 関数 f_s とする ($f_2 = f_s, Q < 0$)。 f_2 の繰返し写像 $x_{n+1} = f_2(x_n)$ が周期点をもつとすれば、その周期は 1 または 2 である。

(証明) f_2 を 2 回施して得られる繰返し写像 $x_{k+2} = f_2^2(x_k)$ を考える ($k = 1, 2, \dots$)。ここで、 $a_n = x_{2k}$ とすると、 $a_{n+1} = f_2^2(a_n)$ が成立する。また、 f_2^2 は上にも下にも有界であり、 $(f_2^2(x))' = f_2'(f_2(x))f_2'(x) > 0$ となる。よって、系列 $\{a_n\}$ は単調増加 (減少) 列となる。[命題 1] より、有界な単調増加 (減少) 列となる繰返し写像は周期点をもたず、ある実数 $z : z \in \mathbf{R}$ に収束する。ゆえに、系列 $\{a_n\}$ は収束する。

ゆえに、 f_2 に関する系列 $\{x_n\}$ は、存在し得るのは 2 周期点と固定点だけであり、3 周期点以上は存在しない。 □

最後に、下記の [命題 3] を、[命題 2] と同様に証明する。[命題 3] により、結合加重の符号が異符号であるタイプ H の場合の基本振動 NN が説明できる。

[命題 3] f_1, f_2 の合成写像 f_3 を $f_3 = f_1 \circ f_2$ とする ($f_1 : Q > 0$ の sigmoid 関数、 $f_2 : Q < 0$ の sigmoid 関数)。このとき、 f_3 が有界な単調減少関数であり、その繰返し写像 $x_{k+2} = f_3(x_k) = f_1(f_2(x_k))$ が周期

(注2) : ある系列 $\{x_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ において、有限に多くの初期項を取り除くと残された系列が単調な増加列または単調な減少列となる場合を、結局的に増加または結局的に減少する系列という [40]。

点をもつとすれば、その周期は 1 または 2 である。

(証明) $b_n = x_{2k}$ とおくと $b_{n+1} = f_3(b_n)$ が成立する。また、 f_3 は上にも下にも有界な関数であり、 $(f_3^2(x))' = f_3'(f_3(x))f_3'(x) > 0$ となる。ゆえに、[命題 2] と同様に、系列 $\{b_n\}$ はある実数 $z: z \in \mathbf{R}$ に収束する。

よって、 f_3 の繰返し写像 $x_{k+2} = f_3(x_k) = f_1(f_2(x_k))$ が周期をもつとすれば、存在し得るのは 2 周期点と固定点だけであり、3 周期点以上は存在しない。同様に、 Q の符号が異符号である、 $f_3 = f_2 \circ f_1$ の場合も証明できる。 □

[命題 3] より、 $x_{n+2} = f_3(x_n)$ は 2 周期点をもつ。ここで $x_2 = f_1(x_1), x_3 = f_2(x_2), x_4 = f_1(x_3), \dots$ となる系列 $\{x_n\}$ は 4 周期点も矛盾なく存在する。よって、 x の系列 $\{x_n\}$ は、固定点、2 周期点または 4 周期点だけが存在する。

[命題 1], [命題 2] 及び [命題 3] により、基本振動 NN は、固定点、2 周期点または 4 周期点だけをもつことがわかった。

5. 3 ニューロンネットワーク

次に、図 5 に示すような基本振動 NN を基本構成要素として含む、3 個のニューロンから成るネットワーク (3 ニューロンネットワーク。以下 3NN と呼ぶ) について考える。

このネットワークも、結合荷重 w_{13}, w_{32} と、基本振動 NN の種類によりその挙動が異なると考えられる。

そこで、結合荷重 w_{13}, w_{32} の正負と基本振動 NN の組合せのそれぞれについて検討を加えた [30], [31]。なお、計算機実験で示すそれぞれの図は、ニューロン N_1 の出力に対するものであり、外部入力値は、 $I_1 = I_2 = I, I_3 = 0$ とする。また、リアプノフ指数のグラフでは、最大リアプノフ指数を示す。

5.1 3NN の計算機実験結果

以下に準周期振動の場合とカオス応答の場合をそれぞれ示す。

ネットワーク 1 準周期振動の場合

ネットワークの結合荷重 W 及びしきい値 θ を式 (10) に示す。

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -10 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}, \theta = (0 \ 0 \ 0) \quad (10)$$

分岐図を図 6 に、最大リアプノフ指数を図 7 に、外

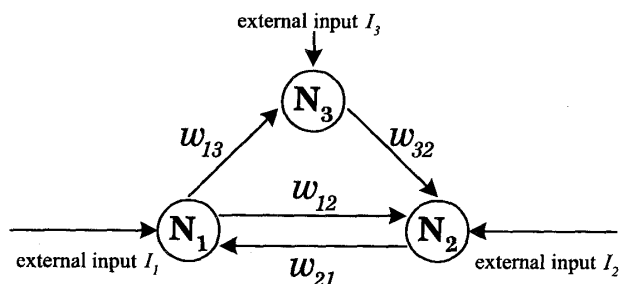


図 5 3 ニューロンネットワーク
Fig. 5 3-Neurons Neural Network (3NN).

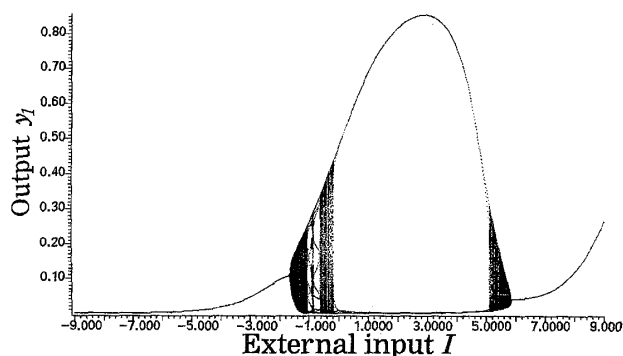


図 6 準周期振動を含む 3NN の分岐図
Fig. 6 Bifurcation diagram of 3NN contained quasi-periodic oscillation.

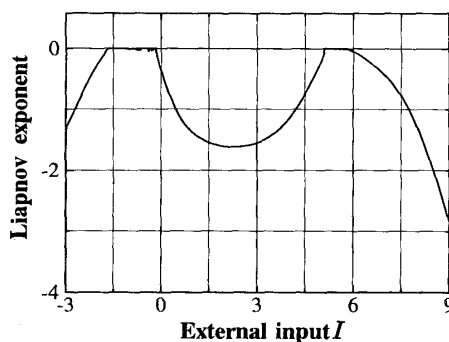


図 7 準周期振動を含む 3NN のリアプノフ指数
Fig. 7 Liapunov exponent of 3NN contained quasi-periodic oscillation.

部入力値 $I = 5.22$ のときのポアンカレ切断面を図 8 に示す。分岐図で点の密度の高い部分が見られるが、最大リアプノフ指数の最大値は 0 以下であり、ポアンカレ切断面は単純な閉曲線である。よって、ニューロン N_1 の出力は準周期振動であると示唆される。

ネットワーク 2 カオスの場合

ネットワークの結合荷重 W 及びしきい値 θ を式 (11) に示す。

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \theta = (0 \ 0 \ 0) \quad (11)$$

分岐図を図 9 に、最大リアプノフ指数を図 10 に、

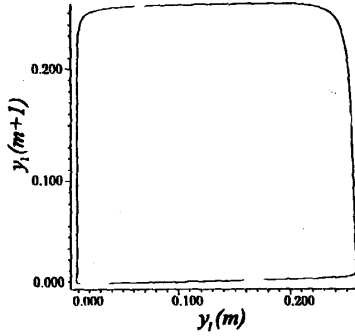


図 8 準周期振動を含む 3NN のポアンカレ切断面. 単純な閉曲線である ($I=5.22$)

Fig. 8 Poincaré section map of 3NN contained quasi-periodic oscillation. An apparently simple closed curve is observed. ($I=5.22$)

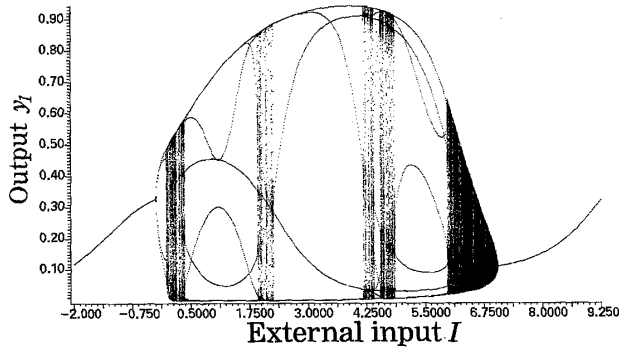


図 9 カオスを含む 3NN の分岐図

Fig. 9 Bifurcation diagram of 3NN contained chaotic behavior.

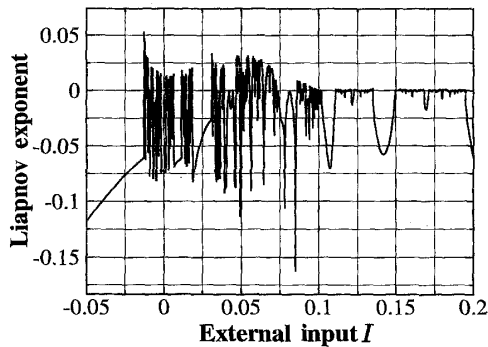


図 10 リアプノフ指数

Fig. 10 Liapunov exponent of 3NN contained chaotic behavior.

外部入力値 $I = -0.0127$ のときのポアンカレ切断面を図 11 から図 14 に示す。

図 9 の分岐図で、点の密度の高い部分が見られるので、この部分について考える。図 10 より、最大リアプノフ指数の最大値は約 0.05 (外部入力値 $I = -0.0127$) である。ここでのポアンカレ切断面は図 11 から図 14 のように折り畳み構造が見られ、また、自己相似 (フラクタル) 的な構造も見られる。よって、ニューロン N_1 の出力はカオスであると考えられる。

4. において基本振動 NN は特異な振舞いをしないことが明らかになっていることから、3 個のニューロンから成る図 5 のネットワーク構成は、CNN の最小構成であると言える。

表 2 に、3NN の計算機実験結果を示す。これから 3NN は、収束、周期振動、準周期振動またはカオスの、いずれかの状態を取ることがわかった。

5.2 基本振動 NN と 3NN の比較

基本振動 NN と 3NN の動作状態の相違について、ニューロンの出力値の時間ステップを考察する。

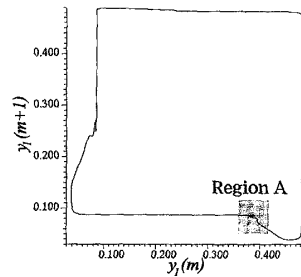


図 11 ポアンカレ切断面
Fig. 11 Poincaré section map.

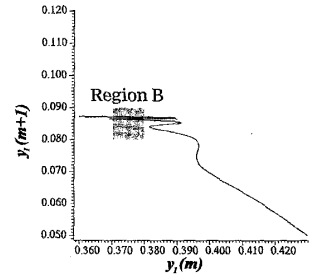


図 12 ポアンカレ切断面.
図 11 の拡大図
Fig. 12 Poincaré section map. Enlarged view of Region A.

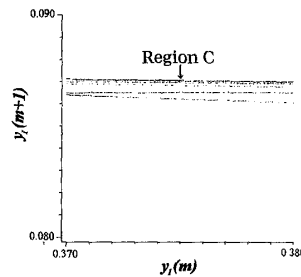


図 13 ポアンカレ切断面.
図 12 の拡大図
Fig. 13 Poincaré section map. Enlarged view of Region B.

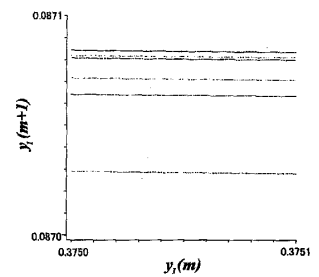


図 14 ポアンカレ切断面.
図 13 の拡大図
Fig. 14 Poincaré section map. Enlarged view of Region C.

表 2 3NN の振舞い
Table 2 Behavior of 3NN.

Conditions	Behavior of Network
タイプ E	
$w_{13} > 0, w_{32} > 0$	CON
$w_{13} < 0, w_{32} < 0$	CON
$w_{13} > 0, w_{32} < 0$	CON, POS
$w_{13} < 0, w_{32} > 0$	CON, POS
タイプ I	
all types	CON, POS
タイプ H	
$w_{13} > 0, w_{32} > 0$	CON
$w_{13} < 0, w_{32} > 0$	CON, POS, QPOS
$w_{13} < 0, w_{32} < 0$	CON, POS, QPOS
$w_{13} > 0, w_{32} < 0$	CON, POS, QPOS, Chaos

Where, CON is Convergence, POS is Periodic Oscillation and QPOS is Quasi-Periodic Oscillation.

はじめに、図 2 に示した基本振動 NN の場合について考える。ニューロン N_1 及び N_2 に対し、それぞれ式 (12) 及び式 (13) が成り立つ。ただし、各ニューロンの外部入力値 I_j としきい値 θ_j の和を、簡単のため I と表す。

$$y_1(m) = f \left\{ \sum_{i=1}^2 w_{i1} x_i(m-1) + \theta_1 + I_1 \right\} \\ = f \{ I + w_{21} y_2(m-1) \} \quad (12)$$

$$y_2(m) = f \left\{ \sum_{i=1}^2 w_{i2} x_i(m-1) + \theta_2 + I_2 \right\} \\ = f \{ I + w_{12} y_1(m-1) \} \quad (13)$$

式 (12) は式 (13) を用いて変形すると次式となる。

$$y_1(m) = f \{ I + w_{21} f \{ I + w_{12} y_1(m-2) \} \} \quad (14)$$

同様に、 $y_1(m)$ から 1 時間ステップだけ遅れた出力は次式で与えられる。

$$y_1(m-1) = f \{ I + w_{21} f \{ I + w_{12} y_1(m-3) \} \} \quad (15)$$

式 (14) と式 (15) を比較すると、基本振動 NN では、偶数時間ステップの出力 $y_1(m)$ と奇数時間ステップの出力 $y_1(m-1)$ は互いに独立していることがわかる。

次に、図 5 で示した 3NN の場合について考える。時刻 m におけるニューロン N_1 , N_2 及び N_3 の出力は、それぞれ式 (16)~式 (18) で与えられる。

$$y_1(m) = f \left\{ \sum_{i=1}^3 w_{i1} x_i(m-1) + \theta_1 + I_1 \right\} \\ = f \{ I + w_{21} y_2(m-1) \} \quad (16)$$

$$y_2(m) = f \left\{ \sum_{i=1}^3 w_{i2} x_i(m-1) + \theta_2 + I_2 \right\} \\ = f \{ I + w_{12} y_1(m-1) + w_{32} y_3(m-1) \} \quad (17)$$

$$y_3(m) = f \left\{ \sum_{i=1}^3 w_{i3} x_i(m-1) + \theta_3 + I_3 \right\} \\ = f \{ I + w_{13} y_1(m-1) \} \quad (18)$$

式 (16) は、式 (17) と式 (18) を用いて次式となる。

$$y_1(m) = f \left\{ I + w_{21} f \left\{ I + w_{12} y_1(m-2) \right. \right. \\ \left. \left. + w_{32} f \left(I + w_{13} y_1(m-3) \right) \right\} \right\} \quad (19)$$

同様に、 $y_1(m)$ から 1 時間ステップだけ遅れた出力は次式で与えられる。

$$y_1(m-1) = f \left\{ I + w_{21} f \left\{ I + w_{12} y_1(m-3) \right. \right. \\ \left. \left. + w_{32} f \left(I + w_{13} y_1(m-4) \right) \right\} \right\} \quad (20)$$

これから、3NN では偶数時間ステップの出力 $y_1(m)$ と奇数時間ステップの出力 $y_1(m-1)$ は、互いに混じり合ったものとなることがわかる。

この「混じり合い」のため、3NN の振舞いは、基本振動 NN と比較して複雑になったと考えられる。

6. む す び

通常用いられるニューロンモデルにより構成されたネットワークの振動現象について考察した。その結果、2 個のニューロンより成るネットワークが取り得る状態は、固定点、2 周期点または 4 周期点だけであることを証明した。更に、ニューロン数 3 個のネットワーク (3NN) においては、出力はカオスを含め、収束、周期振動または準周期振動を呈する構成が存在することを計算機実験により明らかにした。

ニューロン数 2 個のネットワークが特異な振舞いをしないことから、通常用いられるニューロン 3 個で構成されたネットワークは、出力がカオスとなる最小構成であることが明らかとなった。

3NN におけるネットワークの安定性の理論的解析は今後の課題である。

謝辞 4.2 の数学的取扱いに対して貴重な御意見を頂いた岩手大学教育学部小宮山晴夫助教授並びに岩手大学工学部福祉システム工学科井前讓助教授に感謝致します。

文 献

- [1] 甘利俊一, “神経回路網の数理,” 産業図書, 東京, 1992.
- [2] Alving, B.O., “Spontaneous activity in isolated somata of *Aolisia* pacemaker neurons,” *J. Gen. Physiol.*, vol.51, pp.29-45, 1968.
- [3] 林 初男, “神経システムの非線形現象,” コロナ社, 東京, 1998.
- [4] 合原一幸 編, “カオス—カオス理論の基礎と応用—,” サイエンス社, 東京, 1992.
- [5] G. Matsumoto, K. Aihara, M. Ichikawa, and A. Tasaki, *J. Theor. Neurobiol.*, vol.3, 1984.
- [6] K. Aihara and G. Matsumoto, *Chaos in Biological Systems*, H. Degn, A.V. Holden, and L.F. Oisen, ed., p.121, Plenum Press, N.Y., 1987.
- [7] K. Aihara, G. Matsumoto, and Y. Ikegaya, *J. Theor. Biol.*, vol.109, p.249, 1984.
- [8] K. Aihara, T. Takabe, and M. Toyoda, “Chaotic neural network,” *Phys. Lett. A*, vol.144, no.6,7, pp.333-339, March 1990.
- [9] E. Domany et al., *Models of Neural Networks II: Temporal Aspects of Coding and Information Processing in Biological Systems*, Springer-Verlag, 1994.
- [10] H.R. Wilson and J.D. Cowman, “A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue,” *Kybernetika*, vol.13, pp.55-80, 1973.
- [11] E.K. Blum and X. Wang, “Stability of fixed points and periodic orbits and bifurcations in analog neural networks,” *Neural Networks*, vol.5, pp.577-587, 1992.
- [12] K. Pakdaman et al., “Transient oscillations in continuous-time excitatory ring neural networks with delay,” *Phys. Rev. E*, vol.55, no.3, pp.3234-3248, March 1997.
- [13] D.R.C. Dominguez, “Inference and chaos by a network of monotonic neurons,” *Phys. Rev. E*, vol.54 no.4, pp.4066-4070, Oct. 1996.
- [14] I. Kanter, “Emergence of chaos in asymmetric networks,” *Phys. Rev. Lett.*, vol.77, no.23, pp.4844-4847, Dec. 1996.
- [15] 中村雄一, 三上 博, “3成分系アナログニューラル発振器の分岐現象とカオスアトラクタ,” *信学論 (A)*, vol.J81-A, no.10, pp.1345-1351, Oct. 1998.
- [16] 合原一幸 編, *応用カオス*, サイエンス社, 東京, 1995.
- [17] 合原一幸, *カオスの数理と技術—カオス, フラクタル, 複雑系への序章—*, 放送大学, 東京, 1997.
- [18] L. Wang and D.L. Alkon, *Artificial Neural Networks Oscillations, Chaos, and Sequence Processing*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, 1993.
- [19] L. Wang, “Oscillatory and chaotic dynamics in neural networks under varying operating conditions,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.7, no.6, pp.1382-1387, 1996.
- [20] L. Wang et al., “Oscillations and chaos in neural networks: An exactly solvable model,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol.87, pp.9467-9471, USA, Dec. 1990.
- [21] L. Wang, “Suppressing chaos with hysteresis in a higher order neural network,” *IEEE Trans. Circuits & Syst. II*, vol.43, no.12, pp.845-846, Dec. 1996.
- [22] 吉田等明, 三浦 守, “多様な周期で振動するニューラルネットワーク,” 計測自動制御学会東北支部 30 周年記念学術講演会, pp.53-58, Oct. 1994.
- [23] H. Yoshida and M. Miura, “Chirality in neural network system,” *Proc. APCCAS'94*, 4A.1, pp.3-7, 1994.
- [24] 吉田等明, 三浦 守, “ニューラルネットワークにおけるキラリティ 振動周期の教師無し学習,” 平 6 東北連大, 2F1, Aug. 1994.
- [25] 米城健二, 吉田等明, 三浦 守, “人工ニューラルネットワークにおける振動発生機構,” 計測自動制御学会東北支部第 153 回研究集会, 153, pp.1/3-7/3, 1995.
- [26] 新井朝雄, *対称性の数理*, 日本評論社, 東京, 1993.
- [27] 米城健二, 吉田等明, 三浦 守, “人工ニューロンの組み合わせによるカオスの発生,” 平 7 東北連大, 1E15, pp.181, Aug. 1995.
- [28] 米城健二, 吉田等明, 恒川佳隆, 三浦 守, “ニューラルネットワークにおける振動, 準周期振動, カオス,” 第 18 回情報理論とその応用シンポジウム, E-7-3, pp.735-738, Oct. 1995.
- [29] H. Yoshida, K. Yoneki, Y. Tsunekawa, and M. Miura, “Chaos neural network,” *Proc. ISPACS'96*, vol.1of3, pp.16.1.1-16.1.5, 1996.
- [30] 吉田等明, 川村 暁, 恒川佳隆, 三浦 守, “ニューロン 3 個から成るネットワークの振動現象,” 計測自動制御学会東北支部第 174 回研究集会, 174-9, pp.1/9-9/9, May 1998.
- [31] 川村 暁, 吉田等明, 恒川佳隆, 三浦 守, “カオス・ニューラルネットワークの最小構成,” *信学技報*, NC98-107, pp.67-74, March 1999.
- [32] 長島弘幸, 馬場良和 共著, *カオス入門 現象の解析と数理*, 培風館, 東京, 1992.
- [33] D. Gulick, *Encounters with Chaos*, McGraw-Hill, 1992, 前田恵一ら訳, *カオスとの遭遇—力学系への数学的アプローチ—*, 産業図書, 東京, 1995.
- [34] 芹沢 治, *カオスの現象学*, 東京図書, 東京, 1993.
- [35] P. Berge et al., *L'ordre dans le chaos*, Hermann, 1984. 相沢洋二 訳, *カオスの中の秩序—乱流の理解へ向けて—*, 産業図書, 東京, 1996.
- [36] 川上 博, 上田哲史 共著, *C によるカオス CG*, サイエンス社, 東京, 1994.
- [37] Henry, D.L. Abarbanel et al., “The analysis of observed chaotic data in physical system,” *Rev. Mod. Phys.*, vol.65, no.4, Oct. 1993.
- [38] 香田 徹, *離散力学系のカオス*, コロナ社, 東京, 1998.
- [39] N.B. Tufillaro et al., “An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos,” Addison-wesley, 1994. 上江洲達也ら 訳, *線形動力学とカオス*, アジソン・ウェスレイ, 東京, 1994.
- [40] M. Martelli, *Discrete dynamical systems and chaos*, CRC Press, 1992. 浪花智英ら 訳, *離散動的システムとカオス*, 森北出版, 東京, 1999.

- [41] R.L. Devaney, A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experimental, Addison-wesley, 1992. 上江冽達也ら 訳, カオス力学系の基礎, アジソン・ウェスレイ, 東京, 1994.

(平成 12 年 8 月 2 日受付, 12 月 11 日再受付)



川村 暁 (学生員)

平 9 岩手大・工・材料卒. 平 11 同大大学院工学研究科博士前期課程情報工学専攻了. 平 11 同大大学院工学研究科博士後期課程電子情報工学専攻入学, 現在に至る. この間, ニューラルネットワークの振動現象とその応用, 暗号などに関する研究に従事.

情報処理学会会員.



吉田 等明

昭 62 東北大・大学院博士課程化学専攻了. 理博. 同年筑波大・技官. 平 1 筑波大・化学系助手. 平 3 岩手大・工・助手. 平 7 岩手大・工・助教授. この間, 計算機化学, ニューラルネットワーク, GA, 暗号などに関する研究に従事.

計測自動制御学会, 情報処理学会, 日本化学会, 米国化学会各会員.



三浦 守 (正員)

昭 37 岩手大・工・電気卒. 同年東北大・工・助手. 昭 43 秋田工業高専助教授. 昭 47 岩手大・工・助教授. 昭 60 同大教授. 工博. この間, マグネティックス, デジタル信号処理及びニューラルネットワークなどに関する研究に従事.

平 1 年 10 月よりウインザ大 (カナダ) 及びカリフォルニア大サンタバーバラ校 (米国) の客員研究員. 計測自動制御学会, IEEE, 情報処理学会, 日本 ME 学会各会員.