

報 文

各段階が均一なサービス率をもつシステムの特性と最大産出率推定

複数サーバーをもつフローラインシステムに関する研究 (第1報)

井山俊郎*, 伊藤精悟**, 野村正靖*

本研究では、各段階のサービス率を均一化するため各段階が異なるサーバー数をもつ複数サーバーフローラインシステムについて、複数サーバー配置位置およびサーバー数と定常状態下のシステム最大産出率の関係をマルコフモデルにより数値解析する。また、このシステムは段階数、サーバー数、バッファーストレージ（待合室）容量が増加するとマルコフモデルの状態数が急増し数値計算が困難となる。そこで多段階の複数サーバーフローラインシステムの最大産出率を近似的に推定する方法を考える。これは次の二つのステップからなる。ステップ1：多段階の複数サーバーシステムと等価な最大産出率を生み出す多段階の単一サーバーシステムを考える。ステップ2：この単一サーバーシステムを Hillier & Boling による近似解法で解く。

The Characteristics of Systems with Equalized Service Rates and the Method of Estimating the Maximum Output Rate

A Study on Multi-Servers Flow Line Systems (Part I)

Toshirou IYAMA, Seigo ITO and Masayasu NOMURA

In this paper, we numerically analyze the multi-servers flow line systems by the Markov model, where each stage has a different number of servers to equalize the stage service rates. As the numbers of stages, servers and the buffer storage capacities increase, the number of states of the Markov models increases and it is difficult to solve these models. We consider the two steps approximation method to estimate the steady state maximum output rate for these multi-stages and multi-servers flow line systems.

1. 緒 言

生産ラインのように多段階でサービスを受け、待ち行列が発生するフローラインシステムに関しては、現在まで数多くの研究が行われているが、その大部分は各段階が単一サーバーをもつ単一サーバーシステムについての研究であり〔1〕～〔6〕、また各段階が同数の複数サーバーをもつ複数サーバーシステムについての研究である〔7〕～〔9〕。しかし、フローラインシステムでは各段階が異なるサービスを行うため各段階の1人のサーバーのサービス率が異なる場合があり、この場合システムの各段階のサービス率を均一化するため各段階に異なるサーバー数を配置する必要がある。このような複雑な形状のフローラインシステムについて

の研究は現在までほとんど行われていない。

本研究では、各段階のサービス率を均一化するため各段階が異なるサーバー数をもち各段階間に同一容量のバッファーストレージ（待合室）を導入した複数サーバーフローラインシステムをマルコフモデルにより解析する。この結果、各段階が種々の複数サーバーをもつフローラインシステムの複数サーバー配置位置およびサーバー数と定常状態下のシステム最大産出率の関係が明らかにされる。また、上記システムは段階数、サーバー数、バッファーストレージ容量が増加するとマルコフモデルの状態数が急増し数値解析が困難となる。そこで本研究ではさらに単一サーバーシステムに対し Hillier & Boling〔3〕が示した近似解法を利用し上記の複数サーバーシステムの最大産出率を近似的に推定する方法を示す。

2. マルコフモデル

各段階が異なるサーバー数をもつ複数サーバーフローラインシステムは図1に示すように段階数 L 、段階

* 岩手大学 (Iwate University)

** (株)東芝 (Tōshiba Corporation)

昭和59年度秋季研究発表会にて発表

受付：昭和59年12月13日，再受付（3回）

受理：昭和60年12月16日

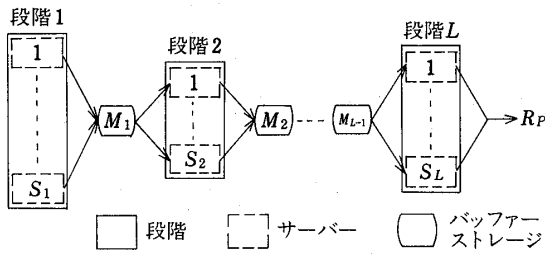


図1 複数サーバーフローラインシステム

i のサーバー数 $S_i (i=1, 2, \dots, L)$, 段階 i と $i+1$ 間のバッファーストレージ容量 $M_i (i=1, 2, \dots, L-1)$ で定義される. このとき段階 i の各サーバーは同一のサービスを行い, サービス時間分布はそれぞれサービス率 λ_i をもつ指数分布と仮定する. また, 各段階のサービス率を均一化するため $S_i \cdot \lambda_i$ は一定と仮定する.

このシステムは, システム状態とその推移確率を用いてマルコフモデルとして解析可能であるが, このときさらに次の仮定を導入する.

- a) 各段階の各サーバーのサービス時間は互いに独立である.
- b) 段階 1 への入力ジョブは無限個存在し段階 1 の各サーバーはアイドル状態が発生せず, 段階 L でサービスを終えたジョブは即座にシステムを去るため段階 L の各サーバーはブロック状態が発生しない.
- c) 任意の段階で複数のサーバーが同時にアイドルあるいはブロック状態にあるとき, それらの解除はランダムである.

ただし, b) はシステムの最大産出率を求めるために導入された仮定であり, c) の解除方法は同一段階のサーバーがすべて同一のサービス率による同一のサービスを行うため定常状態下のシステム最大産出率に影響をもたない.

次にマルコフモデルを考える. システムの状態は各

段階のサーバーの状態とバッファーストレージ内のジョブ数によって定義される. したがって, 各サーバーのとりうる状態は W, I, B すなわちサービス状態, アイドル状態, ブロック状態となるのでこれらを組み合わせてシステムの状態は 3 段階フローラインシステムに対し表 1 となる. たとえば $[S_1 W_1, i_2 I_2, S_3 W_3 | 0, m_2]$ は段階 1 と 3 のすべてのサーバーがサービス状態, 段階 2 の i_2 個のサーバーがアイドル状態で $S_2 - i_2$ 個のサーバーがサービス状態にあり, バッファーストレージ内のジョブ数はそれぞれ 0, m_2 個のシステム状態を表わす.

この結果, システム状態総数 N_L は $L=3, 4$ に対し次式となる.

$$N_3 = (M_1 + 1)(M_2 + 1) + (M_1 + 1)(S_2 + S_3) + (M_2 + 1)(S_1 + S_2) + \sum_{i=1}^3 S_1 S_2 S_3 / S_i + S_2(S_2 - 1) / 2 \quad (1)$$

$$N_4 = (M_1 + 1)(M_2 + 1)(M_3 + 1) + (M_1 + 1)(M_2 + 1)(S_3 + S_4) + (M_1 + 1)(M_3 + 1)(S_2 + S_3) + (M_2 + 1)(M_3 + 1)(S_1 + S_2) + (M_1 + 1)(S_2 S_3 + S_2 S_4 + S_3 S_4) + (M_2 + 1) \cdot (S_1 + S_2)(S_3 + S_4) + (M_3 + 1)(S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3) + \sum_{i=1}^4 S_1 S_2 S_3 S_4 / S_i + S_2(S_2 - 1)(M_3 + 1 + S_3 + S_4) / 2 + S_3(S_3 - 1) \cdot (M_1 + 1 + S_1 + S_2) / 2$$

また, 状態の推移と推移確率の例を図 2 に示す. これは 3 段階フローラインシステムの状態 $[i_1 B_1, S_2 W_2, i_3 I_3 | M_1, 0]$ からの推移である.

このようなシステム状態とその推移確率を用いて定常状態方程式を考え, 状態確率の総和が 1 の条件下で解く. この結果, 2 段階フローラインシステムの最大産出率 R_p は次式となる.

表 1 システム状態 ($L=3$)

システム状態	条件
$\{S_1 W_1, i_2 I_2, i_3 I_3 0, 0\}$	$1 \leq i_l \leq S_l \quad (l=2,3)$
$\{S_1 W_1, i_2 I_2, S_3 W_3 0, m_2\}$	$1 \leq i_2 \leq S_2, 0 \leq m_2 \leq M_2$
$\{S_1 W_1, S_2 W_2, i_3 I_3 m_1, 0\}$	$1 \leq i_3 \leq S_3, 0 \leq m_1 \leq M_1$
$\{S_1 W_1, S_2 W_2, S_3 W_3 m_1, m_2\}$	$0 \leq m_l \leq M_l \quad (l=1,2)$
$\{i_1 B_1, S_2 W_2, S_3 W_3 M_1, m_2\}$	$1 \leq i_1 \leq S_1, 0 \leq m_2 \leq M_2$
$\{S_1 W_1, i_2 B_2, S_3 W_3 m_1, M_2\}$	$1 \leq i_2 \leq S_2, 0 \leq m_1 \leq M_1$
$\{i_1 B_1, i_2 B_2, S_3 W_3 M_1, M_2\}$	$1 \leq i_l \leq S_l \quad (l=1,2)$
$\{i_1 B_1, S_2 W_2, i_3 I_3 M_1, 0\}$	$1 \leq i_l \leq S_l \quad (l=1,3)$
$\{S_1 W_1, i_2 I_2 j_2 B_2, S_3 W_3 0, M_2\}$	$1 \leq i_2 \leq S_2 - 1, 1 \leq j_2 \leq S_2 - i_2$

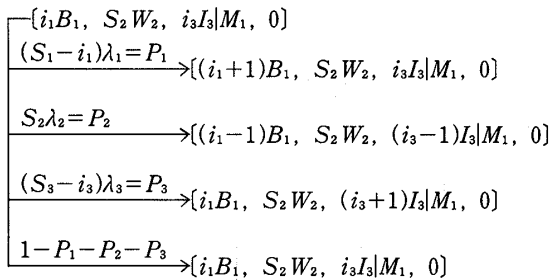


図2 システム状態の推移例

$$R_p = S_2\lambda_2 \left\{ 1 - \left[\frac{S_1!}{S_1^{S_1}} \sum_{i=0}^{S_1-1} \frac{S_1^i}{i!} + \frac{S_2!}{S_2^{S_2}} \sum_{i=0}^{S_2-1} \frac{S_2^i}{i!} + M_1 + 1 \right]^{-1} \right\} \quad (S_1, S_2 \geq 1) \quad (2)$$

3. 複数サーバー配置位置とサーバー数の影響

種々のシステムパラメータをもつフローラインシステム ($M_i = M$) の最大産出率を図3, 4に示す。図には比較のため各段階が同一のサーバー数をもつシステムの最大産出率を破線で示してある。ただし、図中(…, …, …) は段階1, 2, …, Lのサーバー数を表わす。

この結果、対称な形のサーバー数配置 (1, 1, 2) と (2, 1, 1) など同一の最大産出率を与えることがわかる。また、任意の段階におけるサーバー数の増加は単調に最大産出率を増加させるが、とくにバッファーストトレージ容量が小さいほどその最大産出率増加量が大きいことがわかる。しかし、システム内のいくつかの段階でサーバー数が増加した場合サーバー数の増加した段階の位置により最大産出率が異なり、とくにバッファーストトレージ容量の小さなシステムで位置の影響が顕著に現われる。すなわち複数サーバーをもつ段階が中央に位置するほどあるいは単一サーバーをもつ段

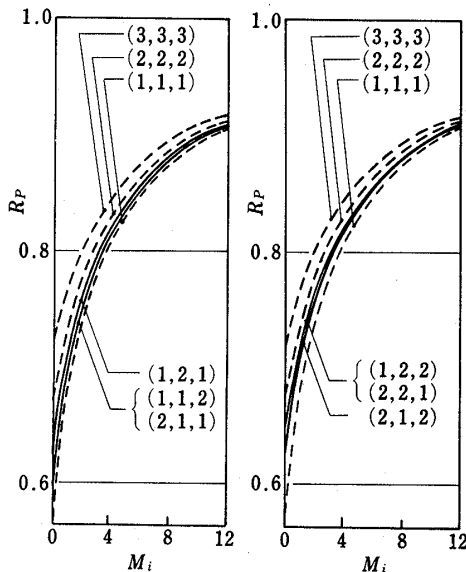


図3 3段階システムの最大産出率 ($S_i\lambda_i = 1$)

階を連続させないほど最大産出率は向上する。たとえば、4段階フローラインシステムでは段階1, 2, 3, 4のサーバー数が(1, 2, 2, 1), (1, 2, 1, 2)あるいは(2, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 2)の並びの順に最大産出率が高い。これは Hillier & Boling[2]が異なるサービス率をもつ単一サーバーシステムに対し示した bowl-phenomenon と同様な現象であり、各段階のサービス率が均一であっても中央の段階のサーバー数の増加は単一サーバーの場合よりも擬似的にその段階のサービス率を高め、最大産出率がとくに向上することを表わしている。

4. 近似解法

フローラインシステムはマルコフモデルにより解くことが可能であるが(1)式で示したように段階数、サーバー数、バッファーストトレージ容量が増加するとシステム状態総数は急増し大型計算機を用いても数値計算が困難となる。したがって、近似解法を考える必要がある。

いま2段階の複数サーバーシステムと同一の最大産出率 R_p を与える等価な2段階の単一サーバーシステムを考える。この単一サーバーシステムは図5に示すように複数サーバーシステムと同一の段階サービス率をもちバッファーストトレージ容量 M_I (仮想バッファ容量) をもつシステムである。このとき R_p は Hunt[1]による2段階の単一サーバーシステムの最大産出率を示す式を用いて次式となる。

$$R_p = S_2\lambda_2(M_I + 2) / (M_I + 3)$$

よって上式に(2)を代入し M_I は次式となる。

$$M_I = \left[\frac{S_1!}{S_1^{S_1}} \sum_{i=0}^{S_1-1} \frac{S_1^i}{i!} + \frac{S_2!}{S_2^{S_2}} \sum_{i=0}^{S_2-1} \frac{S_2^i}{i!} - 2 \right] + M_1 \quad (3)$$

さらに(3)式は $S_2 = 1, M_1 = 0$ の場合の仮想バッファ容量 M_{IS1} と $S_1 = 1, M_1 = 0$ の場合の仮想バッファ容量 M_{IS2} を用いて(4)式に変形される。

$$M_I = M_{IS1} + M_{IS2} + M_1 \quad (4)$$

ただし、

$$M_{IS1} = (S_1! / S_1^{S_1}) \sum_{i=0}^{S_1-1} S_1^i / i! - 1$$

$$M_{IS2} = (S_2! / S_2^{S_2}) \sum_{i=0}^{S_2-1} S_2^i / i! - 1$$

この結果、仮想バッファ容量は各段階のサーバーのサービス率と独立に求められ、各段階のサーバー数の増加による最大産出率増加量はそれぞれ独立に仮想的にバッファーストトレージ容量の増加として考えることができる。

次に任意の段階数の複数サーバーシステムと等価な単一サーバーシステムを考える。この単一サーバーシ

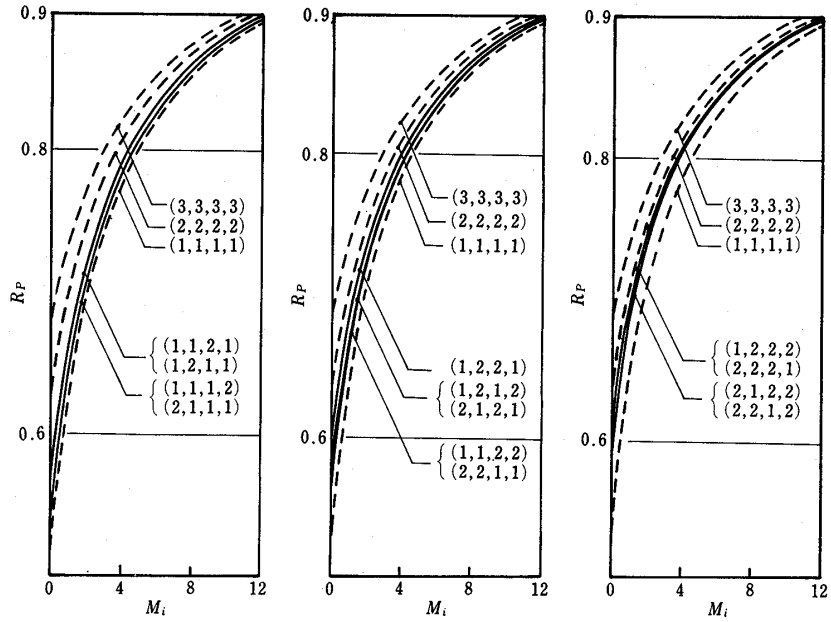


図4 a 4段階システムの最大産出率 ($S_i\lambda_i=1$)

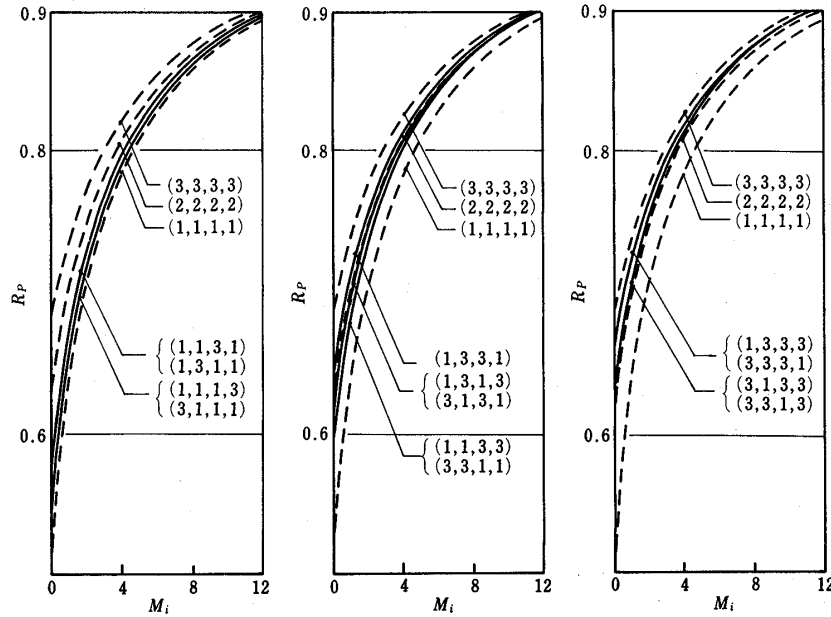


図4 b 4段階システムの最大産出率 ($S_i\lambda_i=1$)

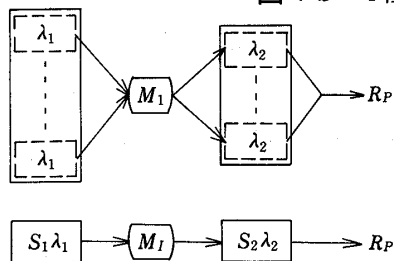


図5 等価な単一サーバーシステム

システムは複数サーバーシステムを2段階の複数サーバーシステムに分割し、それぞれの2段階システムに対し仮想バッファ容量を求め等価な多段階の単一サーバーシステムに置き換えたシステムである。この様子を図6に示す。ただし、段階*i*と*i+1*間の仮想バッ

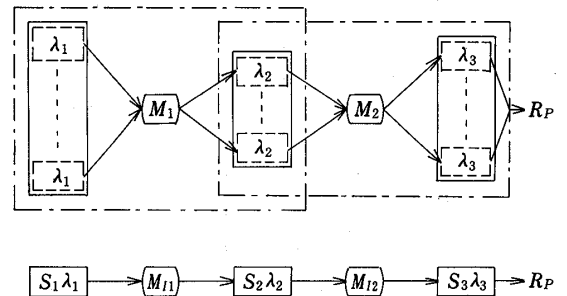


図6 等価な多段階単一サーバーシステム

ファ容量 M_{Hi} は次式で与えられる。

$$M_{Hi} = \left[\frac{S_i!}{S_i^{S_i}} \sum_{k=0}^{S_i-1} \frac{S_i^k}{k!} + \frac{S_{i+1}!}{S_{i+1}^{S_{i+1}}} \sum_{k=0}^{S_{i+1}-1} \frac{S_{i+1}^k}{k!} - 2 \right]$$

$$+M_i \quad (5)$$

この等価な任意の段階数の単一サーバーシステムに対し Hillier & Boling[3]の近似解法を適用し最大産出率を近似的に推定する。

表2, 3に種々のシステムパラメータをもつ複数サーバーフローラインシステム ($M_i=M$)における近似最大産出率とマルコフモデルによる最大産出率を示す。

また, 図7, 8にその誤差を示す。ただし, 図には比較のため対応する段階数をもつ単一サーバーシステムの推定誤差を破線で示す。

この結果, 近似解法による誤差は $M \geq 2$ の場合 $L=3, 4$ に対しそれぞれ約 0.0020 以下, 0.0050 以下となり $M \geq 8$ の場合それぞれ約 0.0005, 0.0020 となり, バッファーストレージ容量が大きくなるにつれ単

表2 3段階フローラインシステムの最大産出率推定 ($S_i \lambda_i=1$) (マルコフ値)

S_1	S_2	S_3	$M=0$	$M=2$	$M=4$	$M=8$	$M=12$
1	1	2	0.5967(0.5946)	0.7452(0.7457)	0.8137(0.8137)	0.8788(0.8784)	0.9102(0.9097)
1	2	1	0.6271(0.6151)	0.7571(0.7557)	0.8200(0.8195)	0.8815(0.8810)	0.9117(0.9111)
1	2	2	0.6480(0.6406)	0.7666(0.7658)	0.8254(0.8251)	0.8839(0.8834)	0.9130(0.9125)
2	1	2	0.6271(0.6262)	0.7571(0.7577)	0.8200(0.8201)	0.8815(0.8811)	0.9117(0.9112)
1	1	3	0.6113(0.6114)	0.7522(0.7531)	0.8178(0.8180)	0.8807(0.8803)	0.9113(0.9108)
1	3	1	0.6622(0.6475)	0.7726(0.7701)	0.8287(0.8278)	0.8853(0.8847)	0.9138(0.9133)
1	3	3	0.6900(0.6828)	0.7864(0.7851)	0.8369(0.8363)	0.8892(0.8887)	0.9160(0.9155)
3	1	3	0.6622(0.6636)	0.7726(0.7735)	0.8287(0.8289)	0.8853(0.8850)	0.9138(0.9133)

表3 4段階フローラインシステムの最大産出率推定 ($S_i \lambda_i=1$) () マルコフ値

S_1	S_2	S_3	S_4	$M=0$	$M=2$	$M=4$	$M=8$	$M=12$
1	1	1	2	0.5418(0.5345)	0.7094(0.7085)	0.7874(0.7860)	0.8617(0.8599)	0.8975(0.8958)
1	1	2	1	0.5669(0.5528)	0.7201(0.7171)	0.7932(0.7910)	0.8642(0.8621)	0.8989(0.8970)
1	1	2	2	0.5767(0.5682)	0.7253(0.7234)	0.7963(0.7946)	0.8657(0.8638)	0.8997(0.8980)
1	2	1	2	0.5871(0.5750)	0.7279(0.7255)	0.7974(0.7955)	0.8659(0.8640)	0.8999(0.8981)
1	2	2	1	0.6061(0.5885)	0.7368(0.7327)	0.8025(0.7998)	0.8681(0.8661)	0.9011(0.8993)
1	1	1	3	0.5493(0.5442)	0.7136(0.7133)	0.7899(0.7888)	0.8629(0.8612)	0.8982(0.8965)
1	1	3	1	0.5893(0.5752)	0.7311(0.7275)	0.7996(0.7972)	0.8671(0.8650)	0.9006(0.8987)
1	1	3	3	0.5997(0.5946)	0.7380(0.7364)	0.8041(0.8025)	0.8694(0.8676)	0.9019(0.9002)
1	3	1	3	0.6245(0.6126)	0.7450(0.7420)	0.8070(0.8050)	0.8702(0.8684)	0.9023(0.9005)
1	3	3	1	0.6505(0.6315)	0.7579(0.7525)	0.8147(0.8116)	0.8739(0.8716)	0.9043(0.9025)

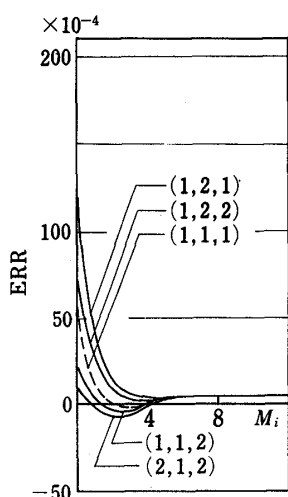


図7 3段階フローラインシステムの推定誤差

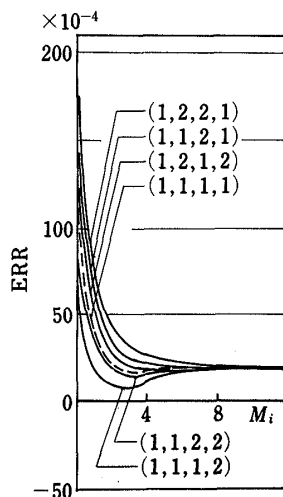
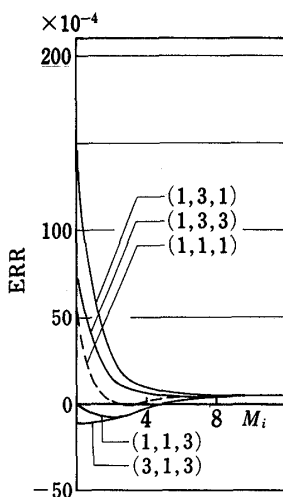


図8 4段階フローラインシステムの推定誤差

一サーバーシステムの推定誤差に収束していくのがわかる。したがって、本研究で示した近似解法は

〔ステップ1〕複数サーバーフローラインシステムを仮想バッファ容量を用いて等価な単一サーバーフローラインシステムに置き換える。

〔ステップ2〕等価な単一サーバーフローラインシステムを Hillier & Boling の方法で解く。

という二つのステップから成るが、バッファストレージ容量が大きくなるにつれてステップ1の誤差はほとんどなくなりステップ2の誤差のみが残ることになる。また、図からバッファストレージ容量が小さな場合、複数サーバーをもつ段階の位置により誤差が大きく異なりとくに中央の段階が複数サーバーをもつシステムで誤差が大きくなることわかる。たとえば、 $L=3, 4$ のシステムでは各段階のサーバー数が(1, 2, 1), (1, 2, 2, 1)の場合に誤差が大きく、逆に(1, 1, 2), (1, 1, 2, 2)の場合に小さく単一サーバーシステムよりも精度が向上する場合がある。

5. 結 言

本研究では、各段階が異なるサーバー数をもつフローラインシステムの特性をマルコフモデルにより数値解析し、複数サーバーをもつ段階の位置およびサーバー数とシステム最大産出率の関係を示した。しかし、マルコフモデルによる数値解析はシステムの構成要素が増加すると状態総数が急増し困難となる。そこで本研究では最大産出率を推定する近似解法を示し、バッファストレージ容量が大きな場合その推定誤差が十分小さく有効な方法であることを示した。また、バッファストレージ容量が大きくなるにつれ推定誤差は単一サーバーフローラインシステムに対する推定誤差に収束することが示され、今後はより精度の高い単一サーバーフローラインシステムの近似解法を研究する

必要がある。

参 考 文 献

- [1] Hunt, G. C.: "Sequential Arrays of Waiting Lines," *Oper. Res.*, pp. 674-683, Vol. 4, No. 6 (1956)
- [2] Hillier, F. S. and Boling, R. W.: "The Effects of Some Design Factors on the Efficiency of Production Lines with Variable Operation Times," *J. Ind. Eng.*, pp. 651-658, Vol. 17, No. 12 (1966)
- [3] Hillier, F. S. and Boling, R. W.: "Finite Queues in Series with Exponential or Erlang Service Times—A Numerical Approach," *Oper. Res.*, pp. 286-303, Vol. 15, No. 2 (1967)
- [4] Knott, A. D.: "The Inefficiency of a Series of Work Stations—A Simple Formula," *Int. J. Prod. Res.*, pp. 109-119, Vol. 8, No. 2 (1970)
- [5] Panwalkar, S. S. and Smith, M. L.: "A Predictive Equation for Average Output of K Stage Series Systems with Finite Interstage Queues," *AIIE Trans.*, pp. 136-139, Vol. 11, No. 2 (1979)
- [6] Rao, Nori Prakasa: "A Generalization of the Bowl Phenomena in Series Production Systems," *Int. J. Prod. Res.*, pp. 437-443, Vol. 14, No. 4 (1976)
- [7] Wild, R. and Slack, N. D.: "The Operating Characteristics of 'Single' and 'Double' Non-Mechanical Flow Line Systems," *Int. J. Prod. Res.*, pp. 139-145, Vol. 11, No. 2 (1973)
- [8] 井山俊郎: "生産ラインにおける並列化の効果——作業時間分布の影響について", 日本経営工学会誌, pp. 335-341, Vol. 31, No. 3 (1980)
- [9] 久芳頼正, 高域重道, 山崎源治: "ブロッキングを伴う直列型システムと並列型システムの評価法", 日本経営工学会誌, pp. 299-304, Vol. 35, No. 5 (1984)